


PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XVII
Palchetto B
Num° d' ordine 25



MÉTHODES ANALYTIQUES

POUR

LA DÉTERMINATION

D'UN ARC DU MÉRIDIEN.

Cet ouvrage se trouve

A Lille, chez VANACKERE.
A Amiens, chez WALLOIS.
A Orléans, chez BERTHEVIN.
A Clermont-Ferrand, chez ROUSSET.
A Bayonne, chez la veuve TREBOSC.
A Strasbourg, chez LEVRAULT.
A Tubingen, chez COTTA.
A Berlin, chez F. T. DELAGARDE.
A Florence, chez MOLINI.
A Gênes, chez YVES GRAVIER.

MÉTHODES ANALYTIQUES

POUR LA DÉTERMINATION

D'UN ARC DU MÉRIDIEN;

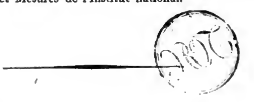
Par J. B. J. DELAMBRE,

Membre de l'Institut national et du Bureau des Longitudes, l'un des deux Astronomes chargés de la mesure de l'Arc compris entre Dunkerque et Barcelonne :

PRÉCÉDÉES

D'UN MÉMOIRE SUR LE MÊME SUJET,

Par A. M. LEGENDRE, Membre de la Commission des Poids et Mesures de l'Institut national.



DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, près le Pont-Neuf.

AN VII.

AVERTISSEMENT.

Les astronomes chargés de mesurer l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelonne, ont terminé leur importante et pénible opération. A leur retour, leur premier soin a été d'exposer aux commissaires nationaux et étrangers, réunis pour fixer l'unité fondamentale des nouvelles mesures, tout leur travail et le parti qu'ils avoient tiré des instrumens nouveaux dont ils s'étoient servis pour les observations astronomiques et géodésiques. Une commission spéciale a pris connoissance des registres et des journaux ; et après avoir examiné tous les angles, et pesé les circonstances dans lesquelles ils avoient été observés, elle a fixé tous les résultats qui doivent servir aux calculs de la méridienne et de la longueur du mètre.

Après avoir détaillé aux commissaires toutes les attentions que j'avois apportées dans les observations de latitude et d'azimuth, dans celles des triangles, et enfin dans la mesure des deux bases, j'ai rendu compte des méthodes que je m'étois faites pour les réductions diverses qu'exigent ces observations, et des formules sur lesquelles j'avois provisoirement calculé la longueur de notre méridienne.

Cette partie, purement théorique, étoit moins susceptible d'une explication verbale, et demandoit un examen plus réfléchi. Il eût été trop long de faire passer mon manuscrit successivement entre les mains de tous les commissaires ; on en demanda l'impression : elle fut commencée

aussi-tôt, et les feuilles étoient distribuées à mesure qu'elles quittoient la presse. Tels sont les motifs qui ont hâté la publication de l'écrit qu'on va lire.

Tous les astronomes qui se sont occupés en différens temps de la mesure des degrés du méridien, ont rendu un compte plus ou moins étendu de leur travail; et après plusieurs ouvrages justement estimés, on seroit tenté de croire qu'il n'y a plus rien de nouveau à dire sur un sujet traité déjà tant de fois. Mais ceux qui ont lu tous ces ouvrages, ont pu remarquer qu'à l'exception de la partie historique et de la vérification des instrumens, ils se ressemblent tous pour le fond, et que dans tous on a suivi les mêmes méthodes de calculs.

Ces méthodes, purement approximatives, pouvoient paroître suffisantes avec les instrumens qu'on employoit alors. Les erreurs du calcul étoient pour l'ordinaire fort inférieures à celles de l'observation, et l'on a eu raison de ne pas affecter une exactitude qui n'eût été qu'illusoire.

Des instrumens nouveaux, en nous permettant d'aspirer à une précision beaucoup plus grande dans la mesure des angles, nous imposoient la loi de chercher pour les calculs des méthodes plus exactes et plus rigoureuses. Avant même qu'il ne fût question de mesurer de nouveau la méridienne, je m'étois occupé de quelques recherches relatives à ces opérations. J'ai publié dans la *Connoissance des Temps* mes formules et mes tables pour les réductions des angles. J'avois dès-lors reconnu l'insuffisance de la méthode employée jusqu'ici pour tenir compte de la convergence des méridiens. Enfin notre mesure ayant commencé vers le milieu de 1792, je sentis bientôt la nécessité d'examiner tous les problêmes que j'aurois à résoudre

dans le cours de ce travail. Je m'attachai à en renfermer la solution dans des formules générales qui dispensassent le calculateur du soin embarrassant de faire des figures pour tous les cas qui peuvent se présenter.

Par-là, je suis parvenu à simplifier les opérations. Voyez, par exemple, dans la *Méridienne vérifiée* la manière dont on expliquoit les élémens de la réduction des angles au centre de la station, et les diverses dénominations employées suivant les différentes positions de l'instrument par rapport à ce centre. Les onze figures qui accompagnent ces explications sont d'un usage peu commode. A chaque observation on étoit obligé de les parcourir toutes pour choisir celle qui convenoit, et l'on avoit encore la peine d'examiner quels devoient être les signes des deux parties de la réduction. D'autres observateurs n'ont trouvé rien de plus sûr que de placer à côté de chacun de leurs angles une figure qui pût guider le calculateur. Une formule aussi simple que générale dispense de tout cet appareil. Il suffit de mesurer une distance et un angle, et avec ces deux données le calcul devient aussi sûr que commode.

Par-tout j'ai suivi la même marche. Quand le lecteur aura vérifié les démonstrations que je donne de chacune des formules, il pourra ensuite s'en servir avec confiance et facilité dans toutes les circonstances.

J'ai donné ces démonstrations dans toute leur étendue : elles sont toutes algébriques, et composées d'une suite d'équations qui se déduisent l'une de l'autre par des substitutions fort simples. Cette méthode me paroit la plus claire et la plus satisfaisante. Quelques personnes la trouveront sans doute un peu longue; mais tous ceux qui s'occupent

d'opérations géodésiques ne sont pas également familiarisés avec les procédés algébriques; et si je m'étois contenté d'indiquer la marche qu'il faut suivre, plusieurs d'entre ceux à qui ce Mémoire peut être utile auroient été dans l'impossibilité de remplir les lacunes et de reconnoître les fautes d'impression, si par hasard il en restoit quelqu'une dans les formules.

Les réductions au centre de la station ne sont pas seules nécessaires. Quand le signal observé a un diamètre sensible, et qu'il est inégalement éclairé, le point observé peut n'être pas dans la direction de l'axe; alors il faut une correction à l'angle observé. Je me suis attaché à déterminer cette correction, trop négligée jusqu'ici; et j'ai donné des formules pour tous les cas que j'ai rencontrés ou que j'ai pu prévoir. Ainsi l'on pourra corriger les erreurs produites par les différentes phases des signaux.

J'ai donné des formules et des tables très-simples pour réduire à l'horizon les angles observés dans des plans inclinés.

Les mêmes tables serviront à réduire les angles horizontaux ou sphériques aux angles rectilignes formés par les cordes des arcs terrestres.

Les cercles de Borda, qui ont servi à toutes nos opérations, permettent de répéter d'une manière presque indéfinie la mesure des distances des étoiles au zénith dans une même nuit pour en conclure la hauteur du pôle; mais ces distances sont observées hors du méridien : elles ont besoin d'une correction. Je donne pour la calculer une série très-convergente, dont les deux premiers termes suffisent toujours, et des moyens faciles pour renfermer ces deux termes dans une table commode.

J'examine

J'examine les différentes erreurs dont ces observations sont susceptibles, et la théorie, confirmée par l'expérience, fait voir que ces erreurs sont insensibles. 1800 observations de ce genre, faites dans le cours de cet hiver par deux étoiles différentes, pour déterminer la latitude de mon observatoire, m'ont donné presque constamment la même quantité pour cette latitude. Les petites variations qu'on remarque d'un jour à l'autre, peuvent très-bien s'attribuer aux irrégularités de la réfraction. Les résultats moyens de mes deux étoiles diffèrent à peine de 0″,2, et je trouverois encore la même chose, si, au lieu d'employer mes 1800 distances, je m'arrêtois à 4 ou 500, c'est-à-dire à une centaine d'observations pour chacune de mes étoiles, tant au-dessus qu'au-dessous du pôle.

A la suite des formules qui servent à trouver, pour tous les sommets d'une longue suite de triangles, les différences de longitude, de latitude et d'azimuth dans la supposition de la terre sphérique, j'explique les moyens de tenir compte de l'applatissement de la terre, et de déterminer cet applatissement par les observations. Pour faciliter cette explication, j'ai réuni un grand nombre de formules qui donnent, en fonction de la latitude, la valeur de toutes les parties de l'ellipse du méridien terrestre. Parmi ces formules, on trouvera deux séries fort simples, qui peuvent être utiles dans les calculs de parallaxes.

Le cercle de Borda peut être considéré comme le meilleur de tous les niveaux. Les distances au zénith, que nous avons observées à tous nos signaux sans exception, donneront les hauteurs de chacun de ces points au-dessus de la mer à Dunkerque et à Barcelonne. Il est vrai que l'incertitude des réfractions terrestres diminue un peu la

précision que l'instrument pourroit faire espérer. Mais avec des observations réciproques et simultanées à deux signaux, on auroit, sans aucune erreur, la différence de niveau des deux stations; et deux observateurs qui se concerteroient, feroient avec beaucoup d'exactitude le nivèlement d'une grande région. J'ai donné pour tous les cas qui peuvent se présenter dans la pratique, les formules finies qui renferment la solution exacte du problème et des séries convergentes dont le premier terme suffit ordinairement.

Enfin, pour rendre ce Mémoire plus utile à tous ceux qui ont à faire des opérations du même genre à-peu-près, que celles qui servent de base à la description d'une méridienne, j'ai donné des exemples numériques de tous les calculs, et j'ai montré comment la seule règle algébrique des signes peut dispenser de toute autre attention, et faire sortir d'une formule générale la solution particulière qui convient à chacun des cas qui peuvent se présenter dans la pratique. J'ai aussi, dans cette partie du Mémoire, placé la solution de quelques problêmes qui m'ont souvent été utiles, et qui le seroient encore plus dans les opérations topographiques.

Quand on a commencé l'impression de ce Mémoire, le cit. Legendre venoit d'en publier un dont l'effet est de rappeler et d'éclaircir les méthodes qu'il avoit données en 1787 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences. On le trouvera en tête de ce volume. Ayant à résoudre les mêmes problêmes, nous avons quelquefois pris la même route, et nous sommes parvenus à des résultats identiques. D'autres fois, ayant pris des routes toutes différentes, nous arrivons à des méthodes qui ne

se ressemblent en aucune manière ; mais elles conduisent au même but. Le calculateur pourra choisir, ou, ce qui vaudroit encore mieux, les employer concurremment. Quand il aura trouvé les mêmes quantités par des procédés qui n'ont rien de commun, il sera convaincu tout-à-la-fois de l'exactitude des méthodes et de la bonté de ses calculs.

DELAMBRE.

Le 11 germinal an 7e.



TABLE.

FIN DE LA TABLE.

E R R A T A.

Pag. 3, *dans la figure, le point* Q *doit être situé sur* L K.

— 5, *ligne avant-dernière, lisez* rayon de courbure de la perpendiculaire au méridien.

Pag. 8, *lig.* 22, le terme qui contient p ; *lisez* le terme qui contient q.

— 11 — 4, *lisez* cette minute seroit la valeur du kilomètre.

Ibid. — 18, $\sin a \sin b$; *lisez* $\sin \alpha \sin \beta$

— 23 — 17, l'angle de réduction ; *lisez* l'angle de direction

— 26 — 26, cos E C A ; *lisez* cos E O A

Ibid. — 30, $-2(r'+r'')\sin^4 \frac{1}{4} d$; *lisez* $-(r'+r'')\sin^2 \frac{1}{4} d$

Ibid. — 31, $-\frac{1}{2}(r'+r'')\sin^2 \frac{1}{2} d$; *lisez* $-\frac{1}{4}(r'+r'')\sin^2 \frac{1}{2} d$

— 30, *à la marge*, FIG. 7 ; *lisez* FIG. 6.

— 51 — 6, *le signe radical affecte les dénominateurs.*

Ibid. — 15, sec F E D ; *lisez* sec G E D

— 32 — 9, E D C ; *lisez* F D C *deux fois.*

Ibid. — 17, A D E ; *lisez* A D F

— 33 — 10, O P E ; *lisez* P O E

— 39 — 5, $+\frac{1}{6}(n \sec H \sec h)^3$; *lisez* $+\frac{1}{2}(n \sec H \sec h)^2$

— 41 — 3, $(1 - m \cot a)$; *lisez* $(1 + m \cot a)$

— 43 — 11, *à la marge, lisez* FIG. 12.

— 57, *à la marge*, FIG. 18 ; *lisez* FIG. 20.

— 58 — 12, $\Sigma\Delta$; *lisez* Σa

— 63 — 4, $-2 \cos 3A$; *lisez* $-2 \cos 3A \cos A$

— 111 — 9, *au dénominateur du premier membre*, $+\frac{1}{2} C u$; *lisez* $+\frac{1}{2} C^{-u}$

— 125 — 8, par l'observation ; *lisez* pour l'observation.

Table II, *au bas de la page* 1re, *mettez* cotang, *au lieu de* tang, *et réciproquement, dans les deux colonnes.*

MÉTHODE

MÉTHODE

Pour déterminer la longueur exacte du quart du Méridien, d'après les observations faites pour la mesure de l'arc compris entre Dunkerque et Barcelonne.

Par A. M. Legendre, *Membre de la Commission des Poids et Mesures, de l'Institut national.*

Les citoyens Delambre et Méchain ayant enfin terminé toutes les opérations relatives à la mesure de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelonne, on va s'occuper sans délai de déduire des données que ces excellens observateurs ont recueillies, la grandeur du quart du méridien qui étoit l'objet principal de leurs travaux. Dans cette circonstance, j'ai cru qu'il ne seroit pas inutile de communiquer aux géomètres quelques idées sur la méthode qu'on pourroit suivre dans le calcul des observations, afin de parvenir à un résultat aussi exact que la nature de la question le comporte. Ces idées sont une suite de celles que j'ai déjà exposées dans un Mémoire sur les opérations trigonométriques, imprimé dans le volume de l'Académie des Sciences, pour l'année 1787; je prendrai de-là occasion de développer quelques démonstrations qui avoient été omises dans ce Mémoire, et que plusieurs personnes ont paru desirer.

Les élémens du calcul empruntés de l'observation sont :

1°. Les angles des triangles et les hauteurs des stations nécessaires pour réduire chaque triangle au plan de l'horizon.

2°. La base de Melun à Liensaint. Cette base principale, ainsi que la base de vérification, mesurée près Perpignan, ont été rapportées à un module particulier, appelé *la règle n°. 1*, dont la longueur est fort approchée de deux toises.

3°. Les azimuths de deux côtés de la chaîne, ou les angles qu'ils font avec le méridien. Ces azimuths ayant été mesurés aux deux extrémités de la chaîne, il en résulte une vérification de

toute l'opération, non moins importante et plus facile que celle qui a été donnée par la mesure d'une seconde base.

4°. Enfin les latitudes des points extrêmes, Dunkerque et Montjouy, ainsi que celles de trois autres points intermédiaires, Paris, Evaux et Carcassonne.

Tous ces élémens ont été déterminés avec un degré de précision qui auroit droit d'étonner, s'il n'étoit une suite nécessaire de l'excellence des moyens employés, et de l'habileté des observateurs.

Du Calcul des Triangles.

Lorsqu'on aura réduit à l'horizon tous les angles des triangles (*Note Ire*), et qu'on aura appliqué à chacun des angles réduits la correction nécessaire pour que la somme des angles de chaque triangle soit égale à 180° + le petit excès dû à la surface du triangle, et calculé *a priori* (*Note II*), il n'y aura plus lieu d'avoir égard à l'inégalité de hauteur des stations, et toute la chaîne de triangles se trouvera projetée sur une surface sphérique ou sphéroïdique, qu'on peut regarder comme un prolongement de la surface de la mer.

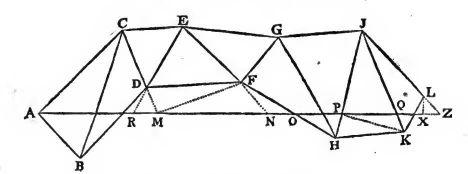
Dans cette hypothèse, qui paroît la plus propre à simplifier les calculs, tous les triangles deviennent sphériques ou sphéroïdiques, les côtés sont ou peuvent être considérés comme des arcs de cercle; et la base, qui est pareillement un arc de cercle, se déduit aisément de la base mesurée, en y appliquant une correction calculée d'après les hauteurs connues de ses deux points extrêmes au-dessus du niveau de la mer.

Cela posé, pour calculer les différens côtés de la chaîne des triangles de projection, on pourra faire usage du théorême énoncé dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1787, et dont nous donnerons la démonstration ci-après (*Note III*); en conséquence, si, dans le triangle proposé, la somme des angles est $180° + \omega$, on retranchera $\frac{1}{3}\omega$ de chacun des angles, afin que la somme des angles restans soit de 180°. Cette sous-

traction faite, on procédera comme si le triangle proposé étoit rectiligne, c'est-à-dire qu'on fera la proportion : *Le sinus de l'angle opposé au côté connu est à ce côté comme le sinus d'un autre angle est au côté opposé.* Le quatrième terme sera la vraie longueur du côté du triangle sphérique qu'on veut résoudre, laquelle se trouvera ainsi avec la même facilité que si la chaîne de triangles qu'on calcule étoit située toute entière sur un même plan.

On a proposé de calculer ces mêmes triangles sphériques, au moyen des triangles rectilignes formés par les cordes de leurs côtés; mais, pour cela, il faut déterminer par autant d'opérations distinctes la différence qu'il y a entre chaque angle du triangle sphérique et l'angle correspondant du triangle rectiligne. Il est évident que cette méthode est moins simple et plus sujette à erreur que celle que nous venons d'exposer.

Du Calcul de l'arc du Méridien.



Soit une chaîne quelconque de triangles ABCDEF, etc. peu éloignée de la méridienne AMNX, et tracée sur une surface courbe qui représente le niveau des eaux de la mer ; on suppose connu par ce qui précède les angles et les côtés de ces triangles, on connoît de plus par l'observation l'angle CAM qui mesure l'azimuth du côté AC, ou son inclinaison par rapport au méri-

dien ; il s'agit de trouver la longueur de la méridienne A X, prolongée jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire L X abaissée du dernier point de la chaîne.

Pour cela, on suivra les mêmes principes que dans le calcul des triangles ; mais on pourra, suivant les circonstances, trouver des moyens d'abréviation, et éviter de calculer autant de parties de la méridienne qu'il y a de triangles. Dans la figure proposée, après avoir prolongé C D en M, on résoudra le triangle A C M, dans lequel on connoît le côté A C, et les deux angles adjacens C A M, A C M ; il faudra d'abord calculer dans ce triangle la valeur de ω, excès de la somme de ses angles sur 180° ; ensuite on retranchera $\frac{1}{3}\omega$ de chacun des angles C A M, A C M, et on prendra la somme des deux restes, qu'on retranchera de 180°, pour avoir l'angle représentatif de C M A. Au moyen de ces trois angles et du côté connu A C, on déterminera les deux côtés A M, C M, par la même proportion que si le triangle étoit rectiligne.

Pour connoître M O, il faut résoudre le quadrilatère D M O F, dans lequel on connoît les angles en M, D, F, et les deux côtés D M, D F. Soit d'abord tirée la diagonale M F, on aura à résoudre le triangle D M F, dans lequel on connoît les côtés D M, D F, et l'angle compris D. Pour cet effet, on procédera comme si le triangle D M F étoit rectiligne, avec l'attention seulement de retrancher de l'angle M D F le tiers de l'excès ω, qui répond à l'aire de ce triangle. On aura donc par ce calcul le côté M F et les deux angles D M F, D F M, à chacun desquels il faudra ajouter $\frac{1}{3}\omega$. Venant alors au triangle M F O, on connoîtra le côté M F et les deux angles adjacens ; on en conclura donc, de la manière ordinaire, les côtés M O, F O, et l'angle M O F.

Dans le triangle O P H, connoissant le côté O H et les deux angles adjacens, on déterminera de même O P, P H, et l'angle O P H.

Enfin le reste de la méridienne P X peut se déterminer successivement par la résolution des trois triangles P H K, P Q K,

QLX; mais il est plus simple de prolonger l'arc JL, et de déterminer PX par la résolution des denx triangles PJZ, LXZ. Dans ce dernier, on connoîtroit l'hypoténnse LZ, l'angle Z et l'angle droit X; il faudroit donc, après avoir déterminé la valeur de ω propre à ce triangle, faire la proportion

$$\sin(90^\circ - \tfrac{1}{3}\omega) : LZ :: \cos(Z - \tfrac{2}{3}\omega) : XZ.$$

Nous avons rénni dans la figure qui sert d'exemple tous les cas qui peuvent se rencontrer, et il ne peut plus y avoir de difficulté pour l'application de la méthode. En général, la quantité très-petite ω varie d'un triangle à l'autre, et doit être déterminée *a priori* pour chacun des triangles qu'on a à résondre; le tiers de cette quantité doit être retranché de chaqne angle du triangle sphérique, ponr y appliquer les règles des triangles rectilignes; mais le résultat étant tronvé, il fant ajouter à chacun des angles la petite qnantité $\frac{1}{3}\omega$ qui en avoit été soustraite. Nous avons donné l'exemple de la résolution d'un quadrilatère DMFO, dans lequel on connoît deux côtés et trois angles; ce calcul, un peu plus difficile que celui des cas ordinaires, peut être évité en prolongeant les denx côtés ED, EF, et calculant les triangles RDM, REN, FNO; mais alors on voit qu'on a trois triangles à calculer au lieu de deux; de sorte que l'avantage reste à la première méthode.

Par ces calculs, on connoîtra en même temps les azimuths d'un assez grand nombre de côtés de la chaîne, c'est-à-dire les angles qne ces côtés font avec la méridienne. Si donc les azimuths ont été déterminés en deux endroits différens, comme on le fait ordinairement aux deux extrémités de la chaîne, on aura un moyen très-simple de vérifier l'opération, puisque l'azimnth conclu de la série des triangles doit s'accorder avec l'azimuth observé (*Note IV*).

Enfin il fant observer que le point X a nne latitude un peu plus grande que le point L. Soit λ la latitude du point L, r le rayon de courbure du méridien vers le point L, y la distance LX, R le nombre de secondes comprises dans le rayon des tables, on

trouvera que la latitude du point X est $\lambda + \frac{1}{2} R \left(\frac{y}{r}\right)^2 \tang \lambda$, où l'on voit que la correction sera exprimée en secondes.

Equations entre les longueurs des Arcs et les latitudes de leurs extrémités.

Par les calculs précédens, on connoîtra les longueurs des différentes parties de la méridienne, comprises entre les parallèles des principaux points de station, qui sont Dunkerque, Paris, Evaux, Carcassonne et Montjouy, près Barcelonne. On connoît d'ailleurs, par des observations très-exactes, les latitudes de ces différens points; il ne s'agit donc plus que d'établir les équations qui doivent avoir lieu entre la longueur de chaque arc et les latitudes de ses extrémités.

Dunkerque.
Paris.
Evaux.
Carcassonne.
Montjouy.

Jusques-là on pouvoit se passer de connoître la nature de la courbe du méridien, et il suffisoit de savoir que cette courbe étoit peu différente du cercle; car dès-lors tous les triangles tracés sur la surface du sphéroïde, et n'excédant pas la grandeur des triangles observés, pouvoient être regardés sensiblement comme des triangles sphériques. Mais à présent, pour avoir la relation entre les longueurs des arcs et les latitudes, il est nécessaire de faire une hypothèse, la plus générale qu'on pourra, sur la figure du méridien.

Soit a le rayon de l'équateur, b le demi-axe ou le rayon mené au pôle; soit v un rayon vecteur quelconque, et ψ l'angle que font entr'elles les lignes b et v; il résulte d'un grand nombre de recherches fondées sur la théorie de l'équilibre des fluides (1), qu'on pourra supposer

$$v = b\,(1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi)$$

m étant une quantité très-petite de l'ordre de l'applatissement,

(1) *Voyez* les Mémoires de l'Acad. des Sciences, année 1789, p. 394 et 418.

et n une quantité de l'ordre m^2. Si on fait $b = a(1 + \alpha)$, en sorte que α désigne la quantité de l'applatissement, on aura donc $\alpha = m + n$.

Dans le cas où la figure du méridien seroit exactement elliptique, on auroit par les propriétés connues de cette courbe,

$$v^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi} = \frac{b^2 (1 + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2 - (2\alpha + \alpha^2) \sin^2 \psi}$$

ou en extrayant la racine, et développant jusqu'aux quantités de l'ordre α^2 inclusivement,

$$v = b\left(1 + (\alpha - \tfrac{3}{2}\alpha^2) \sin^2 \psi + \tfrac{3}{2} \alpha^2 \sin^4 \psi\right).$$

Ainsi la figure représentée par l'équation

$$v = b(1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi)$$

se confondra avec une ellipse, si on a $n = \frac{3}{2} m^2$; mais en général cette équation représente une courbe très-voisine de l'ellipse.

Cela posé, soit S l'arc du méridien compris entre les deux rayons vecteurs a et v, on aura $dS = -\sqrt{(v^2 d\psi^2 + dv^2)}$; donc, en observant que dv est de l'ordre de α, et qu'il suffit de développer toutes les quantités jusqu'aux α^2 inclusivement, on aura

$$dS = -v d\psi - \frac{dv^2}{2 v d\psi} = -b d\psi(1 + m \sin^2\psi + n \sin^4\psi + 2m^2 \sin^2\psi \cos^2\psi)$$

De-là résulte en intégrant et déterminant la constante

$$S = b\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3n}{8} + \tfrac{1}{4} m^2\right)(90^\circ - \psi) + b(\tfrac{1}{4} m + \tfrac{1}{4} n) \sin 2\psi$$
$$+ b(\tfrac{1}{16} m^2 - \tfrac{1}{32} n) \sin 4\psi$$

Il convient maintenant d'introduire, à la place de l'angle ψ, la latitude de l'extrémité de l'arc, que nous appellerons L. Or, quelle que soit la courbe du méridien, il est facile de voir qu'on a en général

$$\tang(\psi + L - 90^\circ) = \frac{dv}{v d\psi}.$$

Donc, puisqu'on néglige les puissances troisièmes de α, on aura

$$\psi + L - 90^\circ = \frac{dv}{v d\psi}, \text{ et } L = 90^\circ - \psi + 2 \sin\psi \cos\psi[m + (2n - m^2) \sin^2\psi]$$
$$= 90^\circ - \psi + (m + n - \tfrac{1}{2} m^2) \sin 2\psi + (\tfrac{1}{4} m^2 - \tfrac{1}{2} n) \sin 4\psi.$$

De-là résulte réciproquement

$$\psi = 90^\circ - L + (m + n - \tfrac{1}{2}m^2)\sin 2L - \left(\frac{5m^2}{4} - \frac{n}{2}\right)\sin 4L.$$

Cette valeur étant substituée dans celle de S, on trouvera, en se bornant toujours aux termes du second ordre,

$$S = b\left[(1 + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{3}{8}n + \tfrac{1}{4}m^2)L - \tfrac{3}{4}(m+n)\sin 2L + (\tfrac{15}{16}m^2 - \tfrac{15}{32}n)\sin 4L\right]$$

Soit M le quart du méridien, on aura, en faisant $L = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$,

$$M = b\,(1 + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{3}{8}n + \tfrac{1}{4}m^2)\,\tfrac{1}{2}\pi.$$

Donc,

$$S = M\left[\frac{L}{\frac{1}{2}\pi} - \frac{3}{4}\,\frac{(m+n-\frac{1}{2}m^2)}{\frac{1}{2}\pi}\sin 2L + \frac{15}{16}\,\frac{(m^2-\frac{1}{2}n)}{\frac{1}{2}\pi}\sin 4L\right]$$

Donc si S′ est un autre arc terminé à la latitude L′, on aura

$$S' - S = M\left(\frac{L'-L}{\frac{1}{2}\pi} - \frac{3}{4}\,\frac{(m+n-\frac{1}{2}m^2)}{\frac{1}{2}\pi}(\sin 2L' - \sin 2L) + \frac{15}{16}\cdot\frac{m^2-\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\pi}(\sin 4L' - \sin 4L)\right)$$

Telle est l'équation qui donne la relation entre un arc quelconque S′ — S du méridien, et les latitudes L′, L de ses points extrêmes. On voit que de cette équation on tirera immédiatement la longueur du quart du méridien M, dès qu'on connoîtra les coefficiens m et n.

Soit pour abréger $p = \frac{3}{4} \cdot \frac{m+n-\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}\pi}$, $q = \frac{15}{16} \cdot \frac{m^2-\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\pi}$, on pourra regarder p et q comme les coefficiens inconnus, et l'équation précédente se réduira à la forme

$$S' - S = M\left(\frac{L'-L}{\frac{1}{2}\pi} - p(\sin 2L' - \sin 2L) + q(\sin 4L' - \sin 4L)\right)$$

Comme le coefficient q est beaucoup plus petit que p, on peut, dans une première approximation, négliger le terme qui contient q.

Appelons L, L′, L″, L‴, L⁗ les latitudes respectives des points M, C, E, P, D; appelons pareillement S, S′, S″, S‴, S⁗ les arcs du méridien compris depuis l'équateur jusqu'à ces différens points. L'équation précédente, appliquée successivement aux deux arcs ME, ED, donnera, en négligeant q, les deux équations

$$S'' - S = M\,\frac{L''-L}{\frac{1}{2}\pi} - Mp(\sin 2L'' - \sin 2L)$$

$$S'''' - S'' = M\,\frac{L''''-L''}{\frac{1}{2}\pi} - Mp(\sin 2L'''' - \sin 2L'')$$

D'après

D'après ces deux équations, il sera facile de déterminer les valeurs de M et p, lesquelles doivent déjà être fort approchées, puisqu'on ne néglige que des quantités de l'ordre de α^2 (1).

Soient M° et p° les premières valeurs approchées de M et p; pour en avoir de plus exactes, on fera $M = M^\circ (1 + x)$, $M p = M^\circ p^\circ (1 + y)$, $M q = M^\circ z$; puis substituant dans l'équation générale les quantités relatives aux quatre arcs ME, ED, MP, CD, on aura les quatre équations

$$\frac{S''-S}{M^\circ}=\frac{L''-L}{\frac{1}{2}\pi}(1+x)-p^\circ(1+y)(\sin 2L''-\sin 2L)+z(\sin 4L''-\sin 4L)$$

$$\frac{S^{IV}-S''}{M^\circ}=\frac{L^{IV}-L''}{\frac{1}{2}\pi}(1+x)-p^\circ(1+y)(\sin 2L^{IV}-\sin 2L'')+z(\sin 4L^{IV}-\sin 4L'')$$

$$\frac{S'''-S}{M^\circ}=\frac{L'''-L}{\frac{1}{2}\pi}(1+x)-p^\circ(1+y)(\sin 2L'''-\sin 2L)+z(\sin 4L'''-\sin 4L)$$

$$\frac{S^{IV}-S'}{M^\circ}=\frac{L^{IV}-L'}{\frac{1}{2}\pi}(1+x)-p^\circ(1+y)(\sin 2L^{IV}-\sin 2L')+z(\sin 4L^{IV}-\sin 4L')$$

où l'on voit qu'en vertu de la supposition par laquelle M° et p° ont été déterminées, les deux premières se réduisent à celles-ci

$$0=\frac{L''-L}{\frac{1}{2}\pi}x-y(\sin 2L''-\sin 2L)+z(\sin 4L''-\sin 4L)$$

$$0=\frac{L^{IV}-L''}{\frac{1}{2}\pi}x-y(\sin 2L^{IV}-\sin 2L'')+z(\sin 4L^{IV}-\sin 4L'')$$

De sorte qu'on aura quatre équations de cette forme

$$\begin{aligned} 0 &= f\,x - g\,y + h\,z \\ 0 &= f'\,x - g'\,y + h'\,z \\ e'' &= f''\,x - g''\,y + h''\,z \\ e''' &= f'''\,x - g'''\,y + h'''\,z \end{aligned}$$

desquelles il faut tirer les valeurs de x, y, z. Dans ce genre d'analyse, dont les questions astronomiques offrent beaucoup d'exemples, il ne faut pas chercher à résoudre exactement trois des équations, ce qui feroit porter toute l'erreur sur la qua-

(1) Il est vraisemblable que l'applatissement α n'est pas fort éloigné de $\frac{1}{320}$, et qu'ainsi on doit avoir $p = \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{1}{320} = \frac{1}{670}$ à-peu-près.

trième ; mais il faut tâcher de compenser les erreurs de manière qn'elles portent à-peu-près également sur tontes les qnatre ; c'est ce qui n'offrira point de difficulté lorsque les valeurs nnmériqnes seront substitnées.

La valeur de x étant connue, on aura immédiatement la longueur du quart du méridien $M = M^{o} (1 + x)$, qui est l'objet principal de ces recherches. Ensuite les valeurs de y et z donneront des notions précieuses sur la figure du méridien.

On anra d'abord $p = \frac{p^{o}(1+y)}{1+x}$, et $q = \frac{z}{1+x}$, ou simplement $p = p^{o}(1+y-x)$, $q = z$. Mais on a fait $p = \frac{3}{4} \cdot \frac{m + n - \frac{1}{2} m^2}{\frac{1}{2}\pi}$, $q = \frac{15}{16} \cdot \frac{m^2 - \frac{1}{2} n}{\frac{1}{2}\pi}$, soit donc $\frac{2}{3} p \pi + \frac{16}{15} q \pi = r$, on aura $m = r - \frac{1}{2} r^2$, $n = 2 m^2 - \frac{16}{15} q \pi$: de-là résnlte l'applatissement $a = m + n$; et pour juger jusqu'à quel point la figure du méridien approche de l'ellipse, on prendra la valenr de $n - \frac{1}{2} m^2$, ou de $\frac{1}{2} m^2 - \frac{16}{15} q \pi$, laquelle devra être zéro, si le méridien est une ellipse. Enfin m et n étant connus, on aura l'éqnation de la courbe du méridien

$$v = b (1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi)$$

dans laqnelle le demi-axe b doit être tiré de l'équation

$$M = b (1 + \tfrac{1}{2} m + \tfrac{3}{8} n + \tfrac{1}{4} m^2) . \tfrac{1}{2} \pi .$$

Ces déterminations ne laisseront rien à desirer, si toutefois les erreurs des quatre équations ci-dessus peuvent être assez atténuées pour ne pas passer les limites des erreurs de l'observation, et si en même temps les valeurs de x, y, z, sont de la petitesse convenable pour justifier l'hypothèse qui sert de base à ces calculs.

Dans le cas très-peu probable où l'on ne ponrroit pas satisfaire assez exactement aux équations mentionnées, on seroit obligé de conclure que la figure du méridien est très-irrégulière, et que la connoissance des neuf ou dix degrés mesurés ne suffit pas pour déterminer la longueur du quart du méridien. Il faudroit donc alors convenir d'une autre manière d'établir la mesure

universelle, et le moyen qui se présente naturellement seroit de prendre, au lieu du quart du méridien, une longueur égale à 10000 fois la minute décimale du méridien, prise au 50e degré décimal de latitude. Cette minnte seroit la valeur du kilomètre, et on pourroit la déterminer avec toute la précision requise d'après les degrés mesurés; mais il y a lieu de croire qu'on ne sera pas obligé d'en venir à cet expédient.

NOTE Ire. *Réduction d'un Angle à l'horizon.*

Soit A l'angle observé entre deux points éloignés; soient $90^\circ + \alpha$ et $90^\circ + \beta$ les distances de ces mêmes points au zénith; soit enfin $A + x$ l'angle résultant de la projection des côtés de l'angle A sur l'horizon, on aura par les formules connues des triangles sphériques, et en supposant le rayon $= 1$,

$$\cos(A+x) = \frac{\cos A - \cos(90^\circ+\alpha)\cos(90^\circ+\beta)}{\sin(90^\circ+\alpha)\sin(90^\circ+\beta)} = \frac{\cos A - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Dans les observations géodésiques, les angles α et β peuvent toujours être supposés très-petits : ainsi, en négligeant seulement les quantités du quatrième ordre, on pourra faire

$$\sin\alpha\sin\beta = \alpha\beta, \quad \cos\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2, \quad \cos\beta = 1 - \tfrac{1}{2}\beta^2,$$

ce qui donnera $\cos(A+x) = \cos A\,(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2) - \alpha\beta$. De-là on voit que x doit être une quantité du second ordre : on peut, par conséquent, mettre $\cos A - x\sin A$ à la place de $\cos(A+x)$, et on aura

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos A}{\sin A} = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1-\cos A}{\sin A} - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos A}{\sin A}.$$

Soit donc pour abréger $\frac{\alpha+\beta}{2} = p$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = q$, on aura

$$x = p^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A - q^2 \cot\tfrac{1}{2}A;$$

cette valeur est exprimée en parties du rayon : mais comme dans la pratique p et q seront donnés en secondes, si l'on veut que x soit exprimé de la même manière, il faudra faire

$$x = \frac{p^2}{R}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A - \frac{q^2}{R}\cot\tfrac{1}{2}A,$$

R étant le nombre de secondes comprises dans le rayon, nombre dont le logarithme est 5,314425.

NOTE II. *Excès de la somme des trois angles d'un triangle réduit à l'horizon, sur* 180°.

Il suffit de connoître à-peu-près les côtés d'un triangle sphérique très-peu courbe, pour être en état de déterminer avec précision le petit excès de la somme de ses trois angles sur 180°. Soit cet excès ω, soit T l'aire approchée du triangle en supposant le rayon de la sphère $= 1$, on aura, par le principe connu de l'aire du triangle sphérique, $\omega = T$: donc si le rayon de la sphère est r, et si on veut que ω soit exprimé en secondes, il faudra faire $\omega = \frac{T}{r^2}.R$, R étant toujours le nombre de secondes contenues dans le rayon des tables.

Dans l'évaluation du rapport $\frac{T}{r^2}$, il faudra exprimer le rayon r de la sphère par la même unité qui sert à exprimer les côtés du triangle. Cette unité ou module valant à-peu-près 2 toises, on devra prendre $\log r = 6.2139$; d'ailleurs on a $\log R = 5.3144$: *donc au logarithme de la surface du triangle, exprimée en modules quarrés, il faudra ajouter le logarithme constant* 2,8866, *et on aura le logarithme de l'excès* ω, *exprimé en secondes.*

NOTE III. *Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.*

Soient A, B, C les angles d'un triangle sphérique infiniment peu courbe, a, b, c les côtés opposés, on aura par la propriété connue $\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b$; et puisque les côtés a et b, comparés au rayon de la sphère, sont très-petits, on pourra

faire $\sin a = a - \frac{a^3}{6}$, $\sin b = b - \frac{b^3}{6}$; ce qui donnera

$$\sin A : \sin B :: a(1 - \tfrac{1}{6}a^2) : b(1 - \tfrac{1}{6}b^2).$$

Cherchons maintenant une indéterminée x, telle qu'on ait

$$a : b :: \sin(A - x) : \sin(B - x);$$

de cette équation on tirera $\tang x = \frac{a \sin B - b \sin A}{a \cos B - b \cos A}$; et parce que $\frac{a}{b} = \frac{(1 - \frac{1}{6}b^2)\sin A}{(1 - \frac{1}{6}a^2)\sin B}$, on aura

$$\tang x = \frac{(1 - \frac{1}{6}b^2)\sin A \sin B - (1 - \frac{1}{6}a^2)\sin B \sin A}{(1 - \frac{1}{6}b^2)\sin A \cos B - (1 - \frac{1}{6}a^2)\sin B \cos A};$$

d'où l'on tire en négligeant seulement les quantités du quatrième ordre

$$x = \tfrac{1}{6}(a^2 - b^2).\frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)}.$$

Mais en considérant le triangle proposé comme rectiligne, il est aisé de voir que la quantité $\frac{1}{6}(a^2 - b^2).\frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)}$ se réduit à $\frac{1}{6}ab \sin C$, et représente par conséquent l'aire du triangle; donc si cette aire est appellée ω, on aura $x = \frac{1}{3}\omega$; d'ailleurs on sait que l'aire ω représente aussi l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique sur 180°; de-là et de la proportion $\sin(A - \frac{1}{3}\omega) : \sin(B - \frac{1}{3}\omega) :: a : b$, qui aura semblablement lieu pour deux autres côtés, on tire ce théorême remarquable :

Si la somme des trois angles d'un triangle sphérique, dont les côtés sont très-petits, est supposée 180° + ω, et que de chaque angle on retranche $\frac{1}{3}\omega$, ce qui réduira la somme des angles restans à 180° juste, je dis que les sinus des angles ainsi diminués seront proportionnels aux côtés opposés, de sorte que le triangle pourra être résolu comme s'il étoit parfaitement rectiligne.

C'est la proposition que j'avois donnée sans démonstration dans les Mémoires de l'Académie, année 1787, pag. 338. Elle ramène immédiatement à la trigonométrie rectiligne la réso-

lution des triangles sphériques très-peu courbes ou dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère. Il est inutile de développer les différens cas de la nouvelle espèce de trigonométrie qu'on pourroit déduire de ce théorême, et il suffit de considérer que le triangle sphérique dont les élémens sont A, B, C; a, b, c, répond toujours à un triangle rectiligne dont les élémens sont $A - \frac{1}{3}\omega$, $B - \frac{1}{3}\omega$, $C - \frac{1}{3}\omega$; a, b, c, de sorte que la résolution de l'un fera toujours connoître la résolution de l'autre. Mais il faut qu'on connoisse au moins un côté, et que ω soit déterminé *a priori* par l'aire du triangle dont il suffit d'avoir une valeur grossièrement approchée.

Au reste, quand même les côtés du triangle à résoudre seroient de quelques degrés, le théorême seroit encore sensiblement vrai et donneroit une approximation suffisante.

NOTE IV. *De la Perpendiculaire à la Méridienne.*

Par un point A dont la latitude $= L$, soit élevée sur le méridien la perpendiculaire $AB = y$, et soit proposé de trouver la latitude du point B, sa longitude, et l'angle PBA que fait BA avec le méridien du point A, c'est-à-dire l'azimuth de A observé de B (1).

Pour cela nous menerons la normale MA terminée à l'axe du sphéroïde en M, et faisant $MA = r$, nous aurons

$$r = b\,(1 + 2\,m - m\cos^2 L);$$

cette ligne MA est en même-temps le rayon de la développée de l'arc AB, de sorte qu'on peut regarder AB comme un arc de cercle décrit du centre M. Faisons en conséquence $\frac{y}{r} = \varphi$, et du point M comme centre, décrivons une surface sphérique qui rencontre en p, a, b les lignes menées de M vers les points P, A, B, (P étant supposé le pôle), nous aurons

(1) La figure est dans le Mémoire cité de 1787; mais on peut aisément y suppléer par cette explication.

un triangle sphérique $p\,a\,b$ dans lequel on connoîtra le côté $p\,a = 90^\circ - \mathrm{L}$, le côté $a\,b = \varphi$, et l'angle compris $p\,a\,b$, qui est un angle droit. On aura donc par les formules ordinaires

$$\cot b = \operatorname{tang} \mathrm{L} \sin \varphi, \quad \cos p\,b = \sin \mathrm{L} \cos \varphi, \quad \operatorname{tang} p = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos \mathrm{L}};$$

développant ces formules dans la supposition que φ est une quantité très-petite, et omettant seulement les quantités de l'ordre φ^4, on aura

$$p = \frac{\varphi}{\cos \mathrm{L}} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\varphi^3 \sin^2 \mathrm{L}}{\cos^3 \mathrm{L}}$$
$$p\,b = 90^\circ - \mathrm{L} + \tfrac{1}{2}\,\varphi^2 \operatorname{tang} \mathrm{L}$$
$$b = 90^\circ - \varphi \operatorname{tang} \mathrm{L} + \tfrac{1}{3}\,\varphi^3 \operatorname{tang} \mathrm{L}\,(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 \mathrm{L})$$

L'angle p donne la différence en longitude entre les deux points A et B; l'angle b est égal à l'azimuth demandé PBA, ou du moins on peut prouver qu'il n'en différe que de la quantité $\frac{1}{2}\,m\,\varphi^3 \operatorname{tang} \mathrm{L}$, qu'il faudroit ajouter à la valeur précédente pour avoir égard à l'aberration de sphéricité; mais cette différence pourra toujours être négligée, même quand la distance y seroit égale à 2 ou 3 degrés. Enfin $90^\circ - p\,b$ ou $\mathrm{L} - \frac{1}{2}\,\varphi^2 \operatorname{tang} \mathrm{L}$, est une valeur approchée de la latitude du point B; mais cette valeur a besoin d'une correction, parce que MB ne se confond pas avec la verticale au point B. Soit cette verticale NB, et la latitude en $\mathrm{B} = \mathrm{L}'$, on trouvera aisément CM (distance du centre C au point M) $= 2\,m\,r \sin \mathrm{L}$, pareillement $\mathrm{CN} = 2\,m\,r \sin \mathrm{L}'$; donc $\mathrm{MN} = 2\,m\,r(\sin \mathrm{L} - \sin \mathrm{L}') = 2\,m\,r\,(\mathrm{L} - \mathrm{L}') \cos \mathrm{L} = m\,r\,\varphi^2 \sin \mathrm{L}$: de-là l'angle NAM ou $\mathrm{NBM} = \frac{\mathrm{MN} \cos \mathrm{L}}{r} = m\,\varphi^2 \sin \mathrm{L} \cos \mathrm{L}$; donc la latitude corrigée du point B sera

$$\mathrm{L}' = \mathrm{L} - \tfrac{1}{2}\,\varphi^2 \operatorname{tang} \mathrm{L} - m\,\varphi^2 \sin \mathrm{L} \cos \mathrm{L}.$$

Si on joint à cet élément la longitude et l'azimuth déjà déterminés, on aura tout ce qui concerne la position du point B.

Quelques personnes ont pensé que des observations d'azimuth et de latitude, faites dans des lieux assez différens en longitude, et dont on connoîtroit la distance, seroient très-propres à déterminer la figure de la terre. Cette opinion n'est nullement fondée, puis-

qu'on voit que la ligne A B étant perpendiculaire à la méridienne, le coefficient m, qui mesure l'applatissement, n'entre que pour une quantité insensible dans l'expression de la latitude, et qu'il influe encore moins sur l'expression de l'azimuth du point B. Ce sont donc au contraire les observations faites dans la direction du méridien, qui sont les plus propres à déterminer la vraie quantité de l'applatissement.

Les formules précédentes s'appliquent à la perpendiculaire LX, menée par le point extrême L de la chaîne des triangles, et on en tire ces deux conséquences (*Voyez* la figure ci-dessus, pag. 3).

1°. Soit la latitude en X = L, en L = λ, soit la distance L X = y, le rayon de la terre ou la normale au point X = r, on aura $\lambda = L - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{r}\right)^2 \operatorname{tang} L - m\left(\frac{y}{r}\right)^2 \sin L \cos L$, et réciproquement

$$L = \lambda + \tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{r}\right)^2 \operatorname{tang} \lambda + m\left(\frac{y}{r}\right)^2 \sin \lambda \cos \lambda\,;$$

mais la seconde partie de la correction sera presque toujours négligeable.

2°. Les mêmes choses étant posées, on aura l'azimuth de L X, c'est-à-dire l'angle au point L, entre la ligne L X et la ligne menée au pôle,

$$= 90° - \frac{y}{r} \operatorname{tang} L + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{r^3} \operatorname{tang} L \left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 L\right)$$

$$= 90° - \frac{y}{r} \operatorname{tang} \lambda - \frac{y^3}{3\,r^3} \operatorname{tang} \lambda \left(1 + \tfrac{3}{2} \operatorname{tang}^2 \lambda\right)$$

A cet angle, ajoutant l'angle calculé Q L X, on aura l'azimuth de L K, lequel doit s'accorder avec l'azimuth observé directement en ce point, et fournira ainsi une vérification de toute l'opération.

Paris, 9 nivôse an VII.

FORMULES ET MÉTHODES

Employées dans les Calculs de la Méridienne de France.

Par J. B. J. DELAMBRE, *Membre de la Commission des Poids et Mesures de l'Institut national.*

LES cercles entiers dont nous nous sommes servis sont en degrés décimaux, c'est-à-dire divisés en 400 parties. Nous n'avons pas encore de tables de sinus rapportées à cette division; ainsi la première chose que nous avons à faire est de convertir les degrés décimaux en degrés ordinaires.

Un degré décimal $= \frac{360}{400}$ degré ordinaire $= 0°,9 = 0° 54' = 1^G$.

J'appellerai pour abréger *grade* le degré décimal, et je le désignerai par la lettre G. On a donc pour la réduction des grades en degrés l'équation $1° = 0°,9 = 0° 54' = 1°$, et pour celle des degrés en grades, l'équation $1° = \frac{10}{9} = 1,1111111111$.

Pour ces doubles conversions, j'ai construit des tables ; mais je ne m'en sers jamais: le calcul direct est presque aussi court.

Proposons-nous d'abord de convertir en degrés	68°,5749
J'en retranche le dixième.	6, 85749
Le reste est l'arc exprimé en décimales de degrés	61°, 71741
En multipliant la fraction par 60, on aura. . .	61° 43',0446
Et puis.	61° 43' 2",676
Proposons-nous pour 2ᵉ exemple de réduire en grades.	61° 43'2",676
Je divise les secondes par 60, et j'ai.	61° 43'0446
Je divise les minutes par 60, et j'ai.	61°,71741
Je prends le neuvième, et je l'ajoute	6°,85749
Et j'ai.	68°,57490

J'aurois pu me contenter de multiplier le neuvième par 10; mais l'addition sert de preuve.

Correction pour l'excentricité de la Lunette inférieure.

FIG. 1. Quand on commence l'observation d'un angle ACB (*fig.* 1.), on met la lunette supérieure sur l'objet A, à droite, dans la direction CA. Si la lunette inférieure étoit concentrique, on la dirigeroit selon CB, et l'arc intercepté donneroit sur le limbe la mesure cherchée. Mais à cause de l'excentricité CD, la lunette inférieure, qui est fixée en D, prend la direction DB.

Quand ensuite on dirige la lunette inférieure sur l'objet A, le point D, par le mouvement de l'instrument sur son pivot, est transporté en E, et la lunette inférieure prend la direction AE; en sorte que le mouvement donné à l'instrument est égal à l'angle DCE, et non pas à l'angle ACB.

$$\begin{aligned} \text{Or } DCE &= ACE - ACD = ACE - (BCD - BCA) \\ &= ACE - BCD + BCA = (90^\circ - A) - (90^\circ - B) + BCA \\ &= 90^\circ - A - 90^\circ + B + BCA = BCA + B - A \\ &= BCA + \frac{CD}{CB} - \frac{CE}{CA}; \end{aligned}$$

car les angles A et B étant fort petits, on peut mettre les sinus au lieu des arcs. Donc la lunette supérieure est repoussée à droite hors de l'angle ACB d'une quantité

$$= BCA + \frac{CD}{CB} - \frac{CE}{CA}.$$

Donc, pour la ramener en B, il faut lui faire décrire

$$ACB + \frac{CD}{CB} - \frac{CE}{CA} + ACB = 2ACB + \frac{CD}{CB} - \frac{CE}{CA}.$$

Donc, en prenant la moitié de l'arc mesuré sur le limbe, on obtient $ACB + \frac{CD}{2CB} - \frac{CE}{2CA} = \frac{1}{2}$ (arc mesuré); donc $ACB = \frac{1}{2}$ (arc mesuré) $+ \frac{CE}{2CA} - \frac{CD}{2CB}$; donc, pour avoir ACB, il faut, à la moitié de l'angle pris sur le limbe, ajouter $\frac{\frac{1}{2}\text{ excentricité}}{D} - \frac{\frac{1}{2}\text{ excentricité}}{G}$.

J'appelle G la distance CB de l'objet B qui est à gauche, et D la distance C A de l'objet A qui est à droite.

Dans la figure, l'excentricité est à droite; si elle eût été à gauche, elle eût été négative, et l'on auroit une correction de signes contraires.

En général, la correction est égale à la moitié de l'excentricité, réduite en secondes et divisée par la distance à l'objet qui est du même côté que l'excentricité, moins la demi excentricité divisée par la distance à l'objet qui est de l'autre côté, par rapport à la lunette excentrique.

Dans nos cercles, l'excentricité est de $18^{\text{lig.}}$ et $\frac{9^{\text{lig.}}}{1^{\text{toise}}} = \frac{1}{96}$: cette quantité, réduite en secondes, est 2148″,6; ainsi la correction sera $+\frac{2148''6}{D} - \frac{2148''6}{G}$.

Les petits arcs étant sensiblement égaux à leurs sinus, il s'ensuit que le sinus de 2″ est égal à deux fois le sinus de 1″; le sinus de 3″ est égal à trois fois le sinus de 1″, ainsi des autres; de sorte que u étant un nombre de secondes qui ne passe pas 2400″ ou 40′, on a $\sin u = u \sin 1''$: de cette équation l'on tire $u = \frac{\sin u}{\sin 1''}$.

Ainsi quand on a le sinus d'un petit arc, on le change en son arc en le divisant par sin 1″; et quand on a l'arc, on le change en son sinus en le multipliant par sin 1″. Si l'arc est de 40′, l'erreur n'est que de 0″,055; s'il est de 1°, l'erreur n'est que de 0″,184.

L'usage de la table Ire est fort facile.

Avec la distance de l'objet qui est du même côté que la lunette excentrique, c'est-à-dire pour nos instrumens avec la distance de l'objet à droite, entrez dans la table, et prenez une correction, à laquelle vous donnerez le signe +.

Avec la distance de l'objet qui est de l'autre côté, c'est-à-dire ici de l'objet à gauche, prenez une seconde correction, que vous marquerez du signe —.

EXEMPLE. Supposons que l'objet à droite soit distant de

C 2

5000 toises, et l'objet à gauche distant de 22000 toises, et l'excentricité à droite.

La distance de l'objet à droite = 5000 toises donne........................ + 0″,43

La distance de l'objet à gauche = 22000 toises donne.......... — 0″,10

Correction totale........ + 0″,33

Si les deux distances sont égales, les deux termes se détruisent, et la correction est nulle.

On pourroit faire de cette correction une table à deux entrées, qui donneroit tout d'un coup la correction entière avec son signe; mais la table étant assez longue et fort peu utile, je la supprime ici. Celle que je donne est à-peu-près aussi commode.

FIG. 2. C'est une remarque curieuse du cit. de Borda, que l'effet de cette excentricité sur les trois angles d'un triangle se réduit à zéro.

En effet, soit ABC un triangle quelconque. L'effet de l'excentricité sur l'angle A est égal à

$$\frac{+\frac{1}{2}e}{AB} - \frac{\frac{1}{2}e}{AC},$$

sur l'angle B est égal à $\frac{+\frac{1}{2}e}{BC} - \frac{\frac{1}{2}e}{AB}$,

sur l'angle C est égal à $\frac{+\frac{1}{2}e}{AC} - \frac{\frac{1}{2}e}{BC}$.

La somme de ces trois valeurs est égale à zéro.

TABLE Ire.

Distance en toises.	Correction.
1000	2″,15
2000	1, 07
3000	0, 72
4000	0, 54
5000	0, 43
6000	0, 36
7000	0, 31
8000	0, 27
9000	0, 24
10000	0, 21
11000	0, 20
12000	0, 18
13000	0, 17
14000	0, 15
15000	0, 14
16000	0, 13
17000	0, 13
18000	0, 12
19000	0, 11
20000	0, 10
21000	0, 10
22000	0, 10
23000	0, 09
24000	0, 09
25000	0, 09
26000	0, 08
27000	0, 08
28000	0, 08
29000	0, 07
30000	0, 07
31000	0, 07
32000	0, 07
33000	0, 06
34000	0, 06
35000	0, 06
36000	0, 06
37000	0, 06
38000	0, 06
39000	0, 05
40000	0, 05

Réduction au Centre de la station.

Il auroit été presque impossible d'éviter toujours les réductions au centre; et le plus souvent on ne l'auroit pu qu'en augmentant considérablement la dépense, et en perdant un

temps précieux. Nous avons cru devoir céder aux circonstances; mais nous avons déterminé avec tout le soin possible la position de notre instrument par rapport au centre de la station. Je vais exposer les méthodes que je me suis faites pour calculer les réductions à ce centre.

On auroit dû observer l'angle ACB (*fig.* 2.); mais ne pouvant se mettre au centre C de la station, on a été forcé de se mettre en O, et l'on a observé AOB. FIG. 2.

$$ACB = AIB - CBO = AOB + OAC - CBO = AOB + \frac{OC \sin AOC}{AC} - \frac{OC \sin BOC}{BC}.$$

Je fais pour abréger $ACB = C$, $AOB = O$, $OC = r$; $AC = D$, c'est la distance de l'objet à droite; $BC = G$, c'est la distance de l'objet à gauche; $BOC = y$: j'ai par ce moyen $AOC = (O + y)$, et $C = O + \frac{r \sin (O + y)}{D} - \frac{r \sin y}{G}$.

Cette formule est générale, en faisant attention aux signes des sinus de $(O + y)$ et de y.

Ainsi le premier terme de la réduction sera positif tant que l'angle $(O + y)$ sera plus petit que 180°. Il deviendra négatif si $(O + y)$ surpasse 180°.

Le second terme sera négatif si l'angle y est plus petit que 180°, et il deviendra positif si l'angle y surpasse 180°.

Il faut que r soit exprimé en secondes, c'est-à-dire multiplié par l'arc égal au rayon, ou 57° 17′ 44″,8, ou, ce qui revient au même, divisé par le sinus d'une seconde. Soit donc b ce sinus; la réduction sera $\frac{r \sin (O + y)}{b.D} - \frac{r \sin y}{b.G}$.

Pour connoître OC, on mesure exactement la distance du centre de l'instrument au centre de la station.

Quand on a mesuré l'angle AOB, la lunette supérieure est dirigée vers l'objet à gauche B, et l'inférieure vers l'objet à droite A. Celle-ci restant fixe sur A, faites mouvoir la lunette supérieure de droite à gauche, jusqu'à ce qu'elle soit pointée à C; le chemin qu'elle aura fait sur le limbe, sera la mesure de l'angle $BOC = y$.

Cette formule n'est au fond que la méthode ordinaire présentée sous une forme plus générale, et qui dispense le calculateur et l'observateur de l'embarras des figures, ou de l'énonciation détaillée de tous les cas qui peuvent arriver suivant les diverses positions du centre O par rapport au centre C. Voici une méthode plus courte, et qui donne la réduction exprimée par un seul terme.

Par les trois sommets du triangle, je fais passer le cercle ACB, et par le point P où BO coupe ce cercle, je mène les cordes CP et AP.

$$ACB = APB = AOB + OAP = AOB + \frac{OP \sin AOB}{b.AP};$$

car le triangle APO donne AP : sin AOB :: OP : sin OAP. Donc $\sin OAP = \frac{OP \sin AOB}{AP}$, et parce que OAP est toujours un très-petit angle, $OAP = \frac{OP \sin AOB}{b.AP}$; donc

$$C = O + \frac{OP \sin O}{b.AP}.$$

Le triangle COP donne

$$OP = \frac{OC \sin OCP}{\sin CPO} = \frac{r \sin (CAB - BOC)}{\sin CAB} = \frac{r \sin (A - y)}{\sin A};$$

donc $C = O + \frac{r \sin (A - y) \sin O}{b.AP \sin A}$; car il est clair que

$$CPO = 180° - CPB = 180° - CAB:$$

donc sin CPO = sin CAB = sin A.

A est l'angle à l'objet à droite dans le triangle ABC; mais

$$AP = AC + CP \cos APC = AC - CP \cos ABC = D - CP \cos B,$$

$$CP = \frac{OC \sin COB}{\sin CPB} = \frac{r \sin y}{\sin CAB} : \text{donc } AP = D - \frac{r \sin y \cos B}{\sin A};$$

$$\text{donc réduction} = \frac{r \sin (A - y) \sin O}{b.\sin A\left(D - \frac{r \sin y \cos B}{\sin A}\right)}$$

$$= \frac{r \sin (A - y) \sin O}{D.b.\sin A} + \frac{r \sin (A - y) \sin O.r \sin y \cos B}{b.D \sin A.D \sin A} + \&c.$$

$$= \frac{r \sin O \sin (A - y)}{b.D \sin A} + \frac{r \sin O \sin (A - y) r \sin y \cos B}{b.D \sin A.D \sin A}.$$

Ainsi quand on a trouvé le premier terme $\frac{r \sin O \sin (A-y)}{b . D \sin A}$, il faut le multiplier par $\frac{r \sin y \cos B}{D \sin A}$. Or il est très-probable que $\frac{\sin y \cos B}{\sin A}$ est moindre que l'unité, et r est certainement très-petit en comparaison de D. Il s'ensuit donc que le second terme est petit en comparaison du premier, et cela à très-peu près dans le rapport de r à D, c'est-à-dire le plus souvent moins d'un dix-millième, et jamais au-dessus de $\frac{1}{1000}$. Supposons donc le premier terme $= 50''$, ce qui est très-rare, le second sera $\frac{50''}{5000} = \frac{1''}{100} = 0'',01$; mais le plus souvent il sera beaucoup moindre. On pourra donc toujours le négliger.

J'ai tâché de me placer de manière à pouvoir tout observer de la même place quand cela étoit possible. Il suffit alors de mesurer une fois r, qui est invariable dans ce cas, et un seul y; d'où l'on conclut tous les autres en y ajoutant différens angles que donne l'observation.

On a pris du point O les angles A O B, B O D, D O E, E O F, FIG. 3.
et l'angle de ~~réduction~~ direction A O C $= y$; cet angle y servira pour réduire au point C l'angle A O B. Mais pour réduire l'angle B O D, il est visible que l'angle de direction est

$$y = BOC = AOB + COA.$$

Pour l'angle E O D, l'angle de direction est

$$y = DOC = DOB + BOA + COA.$$

Pour l'angle F O E, l'angle de direction

$$y = EOD + DOB + BOA + AOC.$$

Enfin pour A O F, l'angle de direction

$$y = FOE + EOD + DOB + BOA + AOC.$$

N. B. On pourroit se dispenser de calculer cette dernière réduction; car elle est égale à la somme de toutes les réductions calculées, prises avec un signe contraire. Il vaut pourtant mieux la calculer, pour avoir une preuve de la bonté des opérations précédentes. Si la somme de toutes les réductions est égale à zéro, on aura tout lieu de croire qu'on ne se sera pas trompé.

Puisque les réductions sont additives ou soustractives suivant l'endroit où l'on se place, il est évident qu'on peut se placer même hors du centre, de manière à ce que la correction soit nulle. En voici les moyens, qui sont le plus souvent impraticables dans l'intérieur des clochers, mais qui sont faciles sur les montagnes ou sur les tours terminées en plate-forme.

La première formule de réduction est $\frac{r\sin(O+y)}{D} - \frac{r\sin y}{G}$.

Lorsque cette quantité est égale à zéro, on a $\frac{r\sin(O+y)}{D} = \frac{r\sin y}{G}$, d'où

$G:D::\sin y:\sin(O+y)$, ou $G\sin O\cos y + G\cos O\sin y = D\sin y$, ou $G\sin O = (D - G\cos O)\tang y$, et

$$\tang y = \frac{G\sin O}{D - G\cos O} = \frac{G\sin C}{D - G\cos C} = \tang A = \tang(180° + A).$$

FIG. 4. Il suffit donc de se placer de manière que $y = A$, ou $180° + A$.

On peut démontrer la même chose par l'autre formule, qui, dans le cas de $y = A$, devient $\frac{r\sin O\sin(A - A)}{D\sin A} = 0$.

Il peut être embarrassant de chercher le point où y aura la condition requise. Cette méthode exigeroit un tâtonnement aussi long qu'incommode.

Si l'on pouvoit se placer sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle, on seroit certain de n'avoir pas besoin de réduction. Il est difficile de se mettre sur cette circonférence; mais on peut aisément se mettre sur la tangente, qui, dans un petit espace, en diffère peu. Pour y parvenir, il faut considérer que si l'on mène OCO' tangente en C au cercle circonscrit, on aura $BCO' = A$, $ACO = B$, $BCO = 180° - A$, $ACO' = 180° - B$. Ainsi, quand on connoît l'un des angles A et B, on peut aisément mener la tangente OCO', sur laquelle on se placera au point le plus voisin du centre que l'on pourra; mais on pourroit se mettre à plusieurs toises sans inconvénient, comme je vais le démontrer.

$$PO = KO - KP = KC\sec CKO - KC = KC(\sec CKO - 1)$$
$$= KC(\tang CKO \tang \tfrac{1}{2} CKO) = \tfrac{1}{2}KC\tang^2 CKO,$$

à

à très-peu près quand CKO est un petit angle, comme il est toujours. Mais $\tang CKO = \frac{CO}{CK}$; donc

$$PO = \tfrac{1}{2} CK \frac{(CO)^2}{(CK)^2} = \frac{\tfrac{1}{2}(CO)^2}{CK}.$$

De plus, $AB = 2\,CK \sin ACB$; donc

$$\frac{1}{CK} = \frac{2 \sin ACB}{AB} = \frac{2 \sin C}{AB};$$

donc

$$PO = \frac{\tfrac{1}{2}(CO)^2 2 \sin C}{AB} = \frac{(CO)^2 \sin C}{AB} = \frac{r^2 \sin C}{H} = \frac{r^2 \sin A}{G} = \frac{r^2 \sin B}{D}.$$

Supposons $r = 3^{\text{tois.}}$, $C = 90°$, $H = 6000^{\text{tois.}}$, jamais nous ne trouverons un cas aussi défavorable; car si $C = 90°$, H sera plus grand dans nos triangles; nous aurons

$$PO = \frac{9^{\text{tois.}}}{6000} = 0{,}0015^{\text{tois.}} = 1^{\text{pou.}}\ 1^{\text{lig.}}$$

Ainsi un observateur placé à trois toises du centre sur la tangente au cercle, ne sera pas éloigné d'un pouce de la circonférence du cercle; et par conséquent la réduction sera insensible, et l'angle sera sensiblement égal à celui qu'on auroit observé sur la circonférence même, ou au centre de la station.

On peut trouver P O de cette manière

$$PO = \frac{(CO)^2}{PO + 2\,CK} = \frac{(CO)^2}{PO + \frac{AB}{\sin C}} = \frac{(CO)^2 \sin C}{H + PO \sin C}.$$

Cette expression est rigoureuse. En négligeant le terme insensible $PO \sin C$, on trouvera l'expression précédente.

Dans les suppositions ci-dessus, qui seroient déjà forcées, l'erreur de l'angle ou la réduction seroit

$$+ \frac{PO \sin (O + A)}{D \sin 1''} - \frac{PO \sin A}{G \sin 1''}.$$

Si nous supposons les deux sinus chacun $= 1$, la réduction sera $+ \frac{0'',0015}{D \sin 1''} - \frac{0'',0015}{G \sin 1''}$. Chacun de ces deux termes sera au plus $0'',052$, et leur différence encore moindre; elle est même nulle. Ainsi la réduction sera véritablement insensible.

FIG. 5. La plupart des clochers qui ont servi de signaux, sont embarrassés par une poutre quarrée verticale qui empêche de viser au centre, et de prendre la distance de ce centre à celui de l'instrument. Cherchons les moyens de lever cet obstacle. Soit E D la diagonale de la poutre, C le centre, O C la distance du centre au centre O de l'instrument, C O F l'angle y, D B et E A perpendiculaires sur O C

$$\sin EOA = \frac{EA}{EO} = \frac{EC \sin C}{EO},$$

$$\sin DOB = \frac{DB}{OD} = \frac{DC \sin C}{OD}.$$

Mais E C = D C ; donc

$$\sin EOA : \sin DOB :: \frac{1}{EO} : \frac{1}{OD} :: OD : EO;$$

donc

$$OD + EO : OD - EO :: \sin EOA + \sin DOB : \sin EOA - \sin DOB$$
$$:: \tan \tfrac{1}{2}(EOA + DOB) : \tan \tfrac{1}{2}(EOA - DOB);$$

donc enfin

$$\tan \tfrac{1}{2}(EOA - DOB) = \frac{(OD - EO)}{(OD + EO)} \tan \tfrac{1}{2}(EOA + DOB) = \frac{(OD - EO)}{(OD + EO)} \tan \tfrac{1}{2} DOE.$$

Nommons r' la distance O D à droite, r'' la distance E O à gauche, y' l'angle F O D, y'' l'angle F O E, a l'angle D O E $= y'' - y'$, et d la différence des angles E O A et D O B, nous aurons

$$\tan \tfrac{1}{2} d = \frac{(r' - r'')}{(r' + r'')} \tan \tfrac{1}{2} a = \left(\frac{r' - r''}{r' + r''}\right) \tan \tfrac{1}{2} (y'' - y') \ldots (1).$$

On connoîtra par observation $r' = DO$, $r'' = EO$, $a = (y'' - y')$; alors on aura $EOA = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} d$ et $DOB = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} d$, et

$$y = FOC = FOD + \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} d = \tfrac{1}{2}(y' + y'') - \tfrac{1}{2} d.$$

A présent, C A = C E cos C = C D cos C = C B ; donc

$$OC = \tfrac{1}{2}(OB + OA) = \tfrac{1}{2}(OD \cos DOB + OE \cos EOA);$$

$$\text{ou } r = \tfrac{1}{2}(r' \cos DOB + r'' \cos EOA) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$r = \tfrac{1}{2}(r' \cos (\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} d) + r'' \cos \tfrac{1}{2}(a + d))$$
$$= \tfrac{1}{2}(r' \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} d + r' \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} d + r'' \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} d - r'' \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} d)$$
$$= \tfrac{1}{2}(r' + r'') \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{2}(r' - r'') \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} d$$
$$= \tfrac{1}{2}(r' + r'') \cos \tfrac{1}{2} a - \cdot (r' + r'') \sin^2 \tfrac{1}{4} d + \tfrac{1}{2}(r' - r'') \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} d$$
$$= \tfrac{1}{2}(r' + r'') \cos \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{4}(r' + r'') \sin^2 \tfrac{1}{2} d + \tfrac{1}{2}(r' - r'') \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} d.$$

Il est évident qu'il n'y a dans les formules (1) et (2) rien qui dépende de la figure de la poutre. Ainsi elle pourroit être quarrée, rectangulaire, hexagone, octogone; mais il faut toujours que la figure soit régulière, afin que DE, ligne qui joint les deux rayons visuels tangens OD, OE, passe toujours par le centre, que je suppose toujours placé sur le milieu de DE.

Si elle étoit circulaire, on auroit

$$r' = r'', \quad d = 0, \quad \text{et } r = r' \sec \tfrac{1}{2} a = r'' \sec \tfrac{1}{2} a.$$

Il peut arriver quelquefois qu'on ne puisse voir à la fois les deux angles opposés, mais seulement les deux extrémités de la même ligne ED. Dans ce cas, FIG. 6.

$$\text{tang} \tfrac{1}{2}(\text{DEO} - \text{EDO}) = \left(\frac{\text{OD} - \text{OE}}{\text{OD} + \text{OE}}\right) \cot \tfrac{1}{2} \text{DOE},$$

ou

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} d = \left(\frac{r' - r''}{r' + r''}\right) \cot \tfrac{1}{2} a.$$

On connoîtra donc

$$\text{OED} = 90° - \tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} d = 90° - (\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} d) = u''$$
$$\text{EDO} = 90° - \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} d = 90° - (\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} d) = u'.$$

Nommons b l'angle $\text{CDE} = \text{CED}$,

$$\text{ODC} = \text{ODE} + b = 90° - (\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} d) + b = u' + b$$
$$\text{OEC} = \text{OED} + b = 90° - (\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} d) + b = u'' + b$$

$$\text{OD} + \text{DC} : \text{OD} - \text{DC} :: \cot \tfrac{1}{2} \text{ODC} : \text{tang} \tfrac{1}{2}(\text{OCD} - \text{DOC})$$
$$= \frac{\text{OD} - \text{DC}}{\text{OD} + \text{DC}} \cot \tfrac{1}{2} \text{ODC} = \frac{r' - m}{r' + m} \cot \tfrac{1}{2}(u' + b) = \text{tang} \tfrac{1}{2} d'.$$

De même

$$\text{tang} \tfrac{1}{2}(\text{OCE} - \text{EOC}) = \frac{\text{OE} - \text{CE}}{\text{OE} + \text{CE}} \cot \tfrac{1}{2} \text{OEC} = \frac{r'' - m}{r'' + m} \cot \tfrac{1}{2}(u'' + b) = \text{tang} \tfrac{1}{2} d''.$$

Enfin

$$\text{OC} = \frac{\text{OD} \sin \text{CDO}}{\sin \text{OCD}} = \frac{\text{EO} \sin \text{CEO}}{\sin \text{ECO}} = r = \frac{r' \sin(u' + b)}{\sin p'} = \frac{r'' \sin(u'' + b)}{\sin p''}.$$

Si la poutre est quarrée,

$$b = 45°, \quad \text{ECD} = 90°, \quad \text{DCO} = 90° - \text{ECO}.$$

Autre Solution.

$$ED : \sin EOD :: DO : \sin DEO = \frac{DO \sin EOD}{ED} = \frac{r' \sin a}{c}$$

$$:: OE : \sin ODE = \frac{OE \sin EOD}{ED} = \frac{r'' \sin a}{c}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(DCO - DOC) = \left(\frac{OD - CD}{OD + CD}\right) \cot \tfrac{1}{2}(ODE + CDE)$$

$$= \left(\frac{r' - m}{r' + m}\right) \cot \tfrac{1}{2}(ODE + CDE) = \left(\frac{r' - m}{r' + m}\right) \cot \tfrac{1}{2}(u' + b)$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(ECO - EOC) = \left(\frac{OE - CE}{OE + CE}\right) \cot \tfrac{1}{2}(OED + DEC)$$

$$= \left(\frac{r'' - m}{r'' + m}\right) \cot \tfrac{1}{2}(OED + DEC) = \left(\frac{r'' - m}{r'' + m}\right) \cot \tfrac{1}{2}(u'' + b)$$

$$\sin DCO : OD :: \sin CDO : OC = \frac{OD \sin CDO}{\sin DCO}$$

$$= \frac{r' \sin(ODE + DEC)}{\sin DCO} = \frac{r' \sin(u' + b)}{\sin DCO = p'}$$

$$\sin ECO : EO :: \sin COE : OC = \frac{ED \sin CEO}{\sin ECO}$$

$$= \frac{r'' \sin(OED + DEC)}{\sin ECO} = \frac{r' \sin(u'' + b)}{\sin ECO = p''}.$$

Troisième Solution.

FIG. 6. $CD : \sin COD :: CO : \sin CDO$; $\sin COE : CE :: \sin CEO : CO$;
mais $CD = CE$ et $CO = CO$: donc

$$\sin COE : \sin COD :: \sin CEO : \sin CDO;$$

donc $\sin COD + \sin COE : \sin COD - \sin COE$

$$:: \sin CDO + \sin CEO : \sin CDO - \sin CEO;$$

donc $\text{tang}\tfrac{1}{2}(COD + COE) : \text{tang}\tfrac{1}{2}(COD - COE)$

$$:: \text{tang}\tfrac{1}{2}(CDO + CEO) : \text{tang}\tfrac{1}{2}(CDO - CEO),$$

$$COD + COE = a,$$

$$CDO + CEO = 360° - O - C = (360° - C - a).$$

(J'appelle C l'angle au centre); donc

$$\tang \tfrac{1}{2} a : \tang \tfrac{1}{2} (COD - COE) :: \tang \left(180^\circ - \frac{C+a}{2}\right)$$
$$: \tang \tfrac{1}{2} (CDO - CEO);$$

donc

$$\begin{aligned}\tang\tfrac{1}{2}(COD-COE) &= -\tang\tfrac{1}{2} a \cot\tfrac{1}{2}(C+a) \tang\tfrac{1}{2}(CDO-CEO)\\ &= -\tang\tfrac{1}{2} a \cot\tfrac{1}{2}(C+a) \tang\tfrac{1}{2}(EDO-DEO)\\ &= +\tang\tfrac{1}{2} a \cot\tfrac{1}{2}(C+a) \tang\tfrac{1}{2}(DEO-ODE).\end{aligned}$$

Or le triangle O D E donne

$$OD : OE :: \sin DEO : \sin ODE$$
$$OD+OE : OD-OE :: \sin DEO + \sin ODE : \sin DEO - \sin ODE$$
$$:: \tang\tfrac{1}{2}(DEO+ODE) : \tang\tfrac{1}{2}(DEO-ODE);$$

donc

$$\begin{aligned}\tang\tfrac{1}{2}(DEO-ODE) &= \frac{OD-OE}{OD+OE} \tang\tfrac{1}{2}(DEO+ODE)\\ &= \frac{r'-r''}{r'+r''} \tang(90^\circ - \tfrac{1}{2} a) \ldots\ldots\ldots\ldots (I)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\tang\tfrac{1}{2}(COD-COE) &= \frac{r'-r''}{r'+r''} \tang(90^\circ-\tfrac{1}{2} a) \tang\tfrac{1}{2} a \cot\tfrac{1}{2}(C+a)\\ &= \frac{r'-r''}{r'+r''} \cot\tfrac{1}{2}(C+a) \ldots\ldots\ldots\ldots (II).\end{aligned}$$

La formule (I) donnera les trois angles du triangle E D O.
La formule (II) donnera les angles C O D et C O E; alors

$$y = y' + COD = y'' - COE = y' + p' = y'' - p''$$

$$\begin{aligned}OC = \frac{OD \sin ODC}{\sin OCD} &= \frac{OD \sin (ODE + EDC)}{\sin (ODC + DOC)}\\ &= \frac{OD \sin (ODE + b)}{\sin (ODE + b + p')}\end{aligned}$$

$$OC = r = \frac{r' \sin (u' + b)}{\sin (u' + b + p')} = \frac{r'' \sin (u'' + b)}{\sin (u'' + b + p'')};$$

et si l'on fait $\frac{r''}{r'} = \text{tang}\, x$ .... (1)

on aura $\text{tang}\, \frac{1}{2} d = \text{tang}\,(x - 45°)\, \text{tang}\,(90° - \frac{1}{2} a)$ .... (2)

$u' = 90° - \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} d$ .... (3)

$u'' = 90° - \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} d$ .... (4)

$\text{tang}\, \frac{1}{2} d' = +\, \text{tang}\,(x - 45°)\, \cot \frac{1}{2}(C + a)$ .... (5)

$COD = p' = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} d'$ .... (6)

$COE = p'' = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} d'$ .... (7)

$r = \frac{r' \sin\,(u' + b)}{\sin\,(u' + b + p')} = \frac{r'' \sin\,(u'' + b)}{\sin\,(u'' + b + p'')}$ .... (8)

$y = y' + p' = y'' - p''$ .... (9).

Si la poutre est quarrée, $C = 90°$ et $b = 45°$.

$\text{tang}\, \frac{1}{2} d' = \text{tang}\,(x - 45°)\, \cot\,(45° + \frac{1}{2} a)$ .... (V)

$r = \frac{r' \sin\,(u' + 45°)}{\sin\,(u' + 45° + p')} = \frac{r'' \sin\,(u'' + 45°)}{\sin\,(u'' + 45° + p'')}$ ..... (VIII).

Cette formule n'emploie pas les côtés de la poutre quarrée.

Si le rectangle HGDE étoit l'intérieur d'un clocher, ou d'un belvédere, ou d'une chambre quelconque dont rien ne marquât le centre, ou dont le centre fût embarrassé, et qu'on eût observé d'un point O dans le rectangle HGDE; en sorte que r' et r'' fussent les distances de l'observateur aux angles D et E, y' et y'' les angles entre l'objet à gauche et les mêmes points D et E; les mêmes formules serviroient encore en faisant attention aux signes. Toute la différence est que l'angle a seroit plus grand que 180° au lieu d'être moindre; mais, dans ce cas, on peut employer des méthodes plus simples. On en verra des exemples ci-après.

Si l'on suppose $C = 180°$ dans les formules ci-dessus, il est visible que $b = 0$; car $b = 90° - \frac{1}{2} C$: alors les formules serviroient pour le cas où la ligne ED passeroit par le centre. Mais j'ai donné pour ce cas une solution particulière qui est plus simple. *Voyez* ci-dessus, page 5.

FIG. 6. L'instrument étoit quelquefois placé de manière qu'il étoit impossible d'observer z' et z''. Supposons, par exemple, qu'on

n'ait pu observer que z''. Pour suppléer à z', on mesuroit le côté de la poutre.

Dans le triangle ODE on connoît les trois côtés. Ainsi on peut calculer l'angle DOE, que nous appelons ordinairement a. Soit donc FIG. 6.

$$OD = r',\quad OE = r'',\quad DE = c,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \frac{\sqrt{\left(\frac{r'+r''+c}{2} - r'\right)\left(\frac{r'+r''+c}{2} - r''\right)}}{\sqrt{(r'.r'')}};$$

connoissant a, on aura $z' = z'' - a$, et l'on calculera r et y par la méthode ordinaire. On peut encore faire le calcul de la manière suivante

$$\sin\tfrac{1}{2}OED = \sin\tfrac{1}{2}u'' = \frac{\sqrt{\left(\frac{r'+r''+c}{2} - r''\right)\left(\frac{r'+r''+c}{2} - c\right)}}{r''.c} = \cos q,$$

en faisant $q = 90° - \frac{1}{2}u''$,

$$\text{tang } GED = \frac{GD}{DE} = \frac{c'}{c}$$

$GED = 45°$ lorsque la poutre est quarrée. Dans ce même cas, on a

$$EC = m = \tfrac{1}{2}ED \sec GED = \frac{c}{2\cos GED} = \frac{c}{2\cos 45°}.$$

$$\text{Soit tang } x = \frac{r''}{m} = \frac{2r''\cos 45°}{c} = \frac{2r''\sin 45°}{c}$$

$$\text{tang }\tfrac{1}{2}d = \text{tang }(x - 45°)\text{ tang }(90° - \tfrac{1}{2}u'' - \tfrac{1}{2}b)$$

$$= \text{tang}(x-45°)\text{ tang}(q-\tfrac{1}{2}b) = \text{tang}(x-45°)\text{ tang}(q-22°\tfrac{1}{2})$$

$$ECO = n'' = q - \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}d,\quad EOC = p'' = q - \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}d,$$

$$y = y'' - p'',\quad r = \frac{r''\sin(p''+n'')}{\sin n''}.$$

Les mêmes formules serviroient pour le cas où l'on n'auroit mesuré que z'; alors il suffiroit de changer r'', p'', n'', z'' et y'' en r', p', n', z' et y', et l'on auroit $y = y' + p'$.

Voyons maintenant ce qu'on peut faire lorsque le centre de la station est invisible, ou qu'il est impossible d'en approcher.

A Cassel, par exemple, on observoit dans une gouttière ou

galerie extérieure à la pyramide quadrangulaire qui termine la
FIG. 10. tour. Soit A B K D (*fig.* 10) la base de la pyramide. Le point C, intersection des diagonales, est le centre auquel il falloit réduire les angles observés dans la gouttière. J'avois placé le cercle dans une ligne verticale, dont le pied étoit en D. Au moyen d'un fil à-plomb, dont la pointe tomboit en A, j'avois mesuré l'angle entre le côté D A et la ligne D E, direction à la tour de Watten. Je connoissois l'angle ADC = ADB par la formule tang $ADB = \frac{AB}{AD}$.

Je connoissois donc F DC; et par conséquent $y = (360° - EDC)$.

Il reste à déterminer r ou la distance au centre. Or

$$r = DC = \frac{\frac{1}{2} DA}{\cos ADC} = \frac{DA}{2 \cos ADB}.$$

Cette position à l'un des angles étoit la plus favorable à la simplicité des calculs; mais, pour faciliter l'observation, on a été obligé, dans un cas particulier, de repousser l'instrument en d. Avec D d, DC, et l'angle compris, il étoit aisé de calculer C d et l'angle A d C; on pouvoit aussi déterminer, si on le jugeoit à propos, la petite différence opérée dans l'angle A D F par ce déplacement. Voici pour cela une formule générale qui peut servir à calculer le plus petit des deux angles inconnus dans un triangle ABC dont on connoît les côtés AB, AC, avec l'angle compris. Je suppose $AC > AB$

$$C = \left(\frac{AB}{AC}\right) \sin A + \tfrac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \sin 2A + \tfrac{1}{3}\left(\frac{AB}{AC}\right)^3 \sin 3A$$
$$+ \tfrac{1}{4}\left(\frac{AB}{AC}\right)^4 \sin 4A + \&c.$$

J'ai donné ce théorême sans démonstration dans la Connoissance des Temps de 1793, page 247. On la trouvera à la fin de ce Mémoire. C est ici exprimé en parties du rayon; pour l'avoir en secondes, il faut en multiplier la valeur par l'arc égal au rayon, ou, ce qui revient au même, la diviser par le sinus de 1″.

FIG. 10. A Rieupeiroux, dans une circonstance semblable à quelques égards, j'ai pris un parti beaucoup plus simple. Ayant élevé la perpendiculaire P O sur le milieu de D K, je plaçai l'instrument en

en O. La distance au centre C étoit $= PO + \frac{1}{2} AD$; et pour mesurer l'angle de direction y, je visois en P qui se trouvoit dans l'alignement de O C.

A Dunkerque, j'avois à réduire au point E un angle pris en O. E étoit le support de la girouette qui est au-dessus de la porte de la cabane du guetteur. Le triangle rectangle PKE, dans lequel j'avois mesuré PK et KE, me donnoit PE et l'angle EPK. Dans le triangle OPE, je connoissois OP, PE et $OPE = 90° + EPK$; je pouvois calculer OE et POE. OE est la distance au centre; et au moyen de ~~OPE~~, je pouvois réduire au point E les angles de direction observés par rapport au point P. FIG. 10. POE

Dans la réalité, le point E étoit sur le côté AD; mais, pour ne point embrouiller la figure, je l'ai supposé sur BK; ce qui n'est ici d'aucune conséquence, puisqu'il ne s'agit que de donner une idée des méthodes.

Dans la flèche d'Amiens, j'étois placé comme en d; mais AD étoit le côté d'un octogone inscrit au cercle; et c'étoit au centre de ce cercle qu'il falloit réduire les angles. A cela près, le calcul étoit le même qu'à Cassel.

A Vignacourt, Vouzon et Chaumont, j'observois dans l'intérieur de clochers embarrassés de charpente. Après avoir mesuré les dimensions intérieures du périmètre ABKD, j'abaissois des perpendiculaires sur deux faces voisines, telles que AD et DK, et l'on conçoit facilement de quelle manière je pouvois déterminer ma position par rapport au centre, c'est-à-dire la distance r à ce centre, et l'angle y qu'elle faisoit, avec les signaux que j'avois à observer. Dans ces cas, à la vérité, il étoit assez difficile de répondre du centre à deux pouces près; mais il doit arriver bien rarement que cette erreur, déjà si légère, se porte en entier sur la longueur de notre méridienne.

Quand nous observions Cassel des signaux voisins, nous avions à nous garantir d'une petite erreur qui faisoit que le point observé n'étoit pas exactement dans l'axe de la tour. On ne voyoit pas toujours la pointe de la pyramide qui la termine;

alors nous étions réduits à observer la tour elle-même en la plaçant entre les fils inclinés à 45° de notre réticule, ainsi qu'on
FIG. 9. le voit dans la *fig.* 9. La pointe de la pyramide étant bien au milieu de la tour, il ne seroit résulté aucune erreur de cette manière d'observer, si les quatre murs qui font le périmètre de la tour eussent été d'égale hauteur; mais l'un des quatre a $0^m,34$ d'élévation de plus que les trois autres. Soit FI le mur plus élevé, GH l'un des trois autres murs. L'observation donnoit l'angle par rapport à la ligne C*am*; mais l'axe de la tour est dans P*bn* parallèle à C*am*. L'erreur est donc proportionnelle à la ligne *ab*. Or

$$ab = Ib - Ia = \tfrac{1}{2}IK - \tfrac{1}{2}Id = \tfrac{1}{2}(IK - Id) = \tfrac{1}{2}dK = \tfrac{1}{2}HK;$$

car $HdK = dHK = 45°$.

L'erreur étoit donc de $\frac{0,34}{D \sin 1''}$, D étant la distance à Cassel; et la correction étoit additive toutes les fois que le mur le plus élevé étoit en même temps le plus voisin de l'objet qu'on observoit avec Cassel; elle étoit soustractive dans le cas contraire. Elle étoit d'environ 1″

Réduction au centre du signal observé.

FIG. 7. Quand les signaux sont éclairés obliquement, ils ont besoin d'une correctiou, parce que le poiut observé n'est pas dans l'axe du signal. Soit, par exemple, le signal *abcd*. Si l'on n'a pu voir que la face éclairée *ab*, on a observé le point A au lieu du point M, centre du sigual, et l'angle observé a besoin d'une correction égale à l'angle AOM.

$$\text{Or } \sin AOM = \frac{AM \sin AMO}{AO} \text{ et } AOM = \frac{AM \sin AMO}{AO \sin 1''}.$$

Si l'on n'avoit vu que la face *bc*, la correction seroit

$$BOM = \frac{MB \sin BMO}{BO \sin 1''},$$

et elle seroit de signe contraire à la première.

Pour être en état de calculer cette correction quand elle se trouveroit nécessaire, j'ai toujours mesuré le côté du quarré

abcd et l'angle *a*MO d'une des diagonales M*a* du signal avec la direction MO à l'un des signaux environnans.

Si le signal est une tour ronde, la correction est un peu plus longue à calculer. En voici la méthode. FIG. 8.

Un observateur placé en O, à une distance considérable de la tour ADBS, ne peut voir cette tour que quand elle est éclairée du soleil, et alors même il n'en voit que la partie éclairée; et s'il prend le milieu de la partie éclairée pour le centre de la tour, il se trompe d'une quantité qu'il s'agit de déterminer.

Soit CS la direction du soleil au temps de l'observation; MS sera l'azimuth du soleil compté depuis midi. Je fais $MS = z$; le demi-cercle ASB sera éclairé du soleil. Soit maintenant OC le rayon visuel de l'observatenr. Je fais $MCO = MQ = x$; je mène DE perpendiculaire à OC.

Le demi-cercle DAQE est celui qui se présente à l'observateur; mais, comme la partie AD n'est pas éclairée du soleil, l'observatenr ne verra que la partie AQSME. J'abaisse AF sur DE; EF sera la projection orthographique de l'arc visible, et cet arc paroîtra par conséqnent comme la droite FE. Cette ligne est plus petite que le diamètre de la quantité

$$DF = CD \cdot 2\sin^2 \tfrac{1}{2} AD = 2CD\sin^2 \tfrac{1}{2}(QS) = 2CD\sin^2 \tfrac{1}{2}(MQ - MS) = 2CD\sin^2 \tfrac{1}{2}(x - z).$$

L'erreur de l'observation sera donc $CD \sin^2 \frac{1}{2}(x - z)$. Pour exprimer cette erreur en secondes, on la divisera par $OC \sin 1''$. Ainsi, faisant $OC = D$, $CD = r$, on aura pour la correction cherchée $\dfrac{r \sin^2 \frac{1}{2}(x - z)}{D \sin 1''}$.

Si le soleil et l'objet anqnel on compare la tour sont du même côté, la correction est additive; s'ils sont de différens côtés, la correction sera négative.

Si $x > z$, le soleil sera à droite de l'observateur.

Il ne reste plus qu'à chercher x et z.

Soient M et P les distances de la tour C au méridien et à la perpendiculaire de l'observatoire, M' et P' les distances de l'observateur O, vous aurez $\tang x = \dfrac{M - M'}{P - P'}$. FIG. 11.

Pour tronver z, il faut connoître la latitude du lieu et la déclinai-

FIG. 11. son du soleil à l'heure de l'observation. Alors, dans le triangle PZS, on connoîtra P, PZ et PS, et l'on cherchera tang PZS ou tang SZM = — tang PZS. Ainsi $\cot z = \cot P \sin L - \frac{\text{tang} D \cos L}{\sin P}$.

Réduction à l'Horizon.

Quand on a observé les trois angles d'un triangle dont le plan est incliné, il faut réduire ces angles à l'horizon. On a, par ce moyen, les angles d'un triangle sphérique céleste qui joindroit les zéniths des trois points, ou d'un triangle sphérique terrestre qui joindroit les pieds des trois signaux. La somme de ces trois angles doit par conséquent excéder 180° d'une quantité que l'on trouve aisément par le théorême de Wallis, sur l'aire du triangle sphérique, et dont on verra ci-après une expression exacte. Cet excès est ordinairement peu de chose; mais lorsqu'il est un peu considérable, et qu'on aspire à beaucoup de précision, on ne sait comment le répartir entre les trois angles, pour être en état de résoudre le triangle rectiligne formé par les cordes des trois côtés du triangle sphérique.

On n'a donné jusqu'ici, pour ces doubles réductions, que des formules très-pénibles, si l'on considère la petitesse des corrections cherchées. Je vais donner le moyen de les trouver plus facilement et plus exactement.

L'angle observé entre deux signaux n'est un angle sphérique que dans le cas où chacun des deux signaux est exactement éloigné de 90° du zénith de l'observateur.

Si les distances au zénith ne sont pas toutes deux de 90°, on imagine un triangle sphérique formé par les deux distances au zénith, et par l'arc qui a pour mesure l'angle observé. Alors, si l'on nomme A l'angle observé, a l'angle réduit à l'horizon, H et h les hauteurs des deux signaux sur l'horizon de l'observateur, on a

$$\cos A = \cos a \cos H \cos h + \sin H \sin h \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ou $$\cos a = \frac{\cos A - \sin H \sin h}{\cos H \cos h} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

et $$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(A + H - h) \sin \frac{1}{2}(A - H + h)}{\cos H \cos h}} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Ces deux dernières formules donnent directement l'angle réduit, qui est toujours considérable. On est obligé de les calculer avec une précision fatigante; il vaut donc mieux chercher la réduction, qui est toujours fort petite.

Soit $A + x = a$, nous aurons

$\cos A = \cos A \cos x \cos H \cos h - \sin A \sin x \cos H \cos h + \sin H \sin h$,

ou

$\sin A \sin x \cos H \cos h - \cos A \cos x \cos H \cos h = \sin H \sin h - \cos A$;

d'où

$$\sin x - \cot A \cos x = \frac{\sin H \sin h - \cos A}{\sin A \cos H \cos h}$$

$$\sin x - \cot A + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cot A = \frac{\sin H \sin h}{\sin A \cos H \cos h} - \frac{\cot A}{\cos H \cos h}$$

$$\sin x + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cot A = \frac{(\cos H \cos h - 1) \cot A + \sin H \sin h \operatorname{cosec} A}{\cos H \cos h}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A \sin^2 \tfrac{1}{2}(H+h) - \operatorname{cosec} A \sin^2 \tfrac{1}{2}(H-h) - \cot A \sin^2 \tfrac{1}{2}(H+h) - \cot A \sin^2 \tfrac{1}{2}(H-h)}{\cos H \cos h}$$

$$= \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A \sin^2 \tfrac{1}{2}(H+h) - \cot \tfrac{1}{2} A \sin^2 \tfrac{1}{2}(H-h)}{\cos H \cos h}.$$

Soit pour abréger

$$n = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A \sin^2 \tfrac{1}{2}(H+h) - \cot \tfrac{1}{2} A \sin^2 \tfrac{1}{2}(H-h),$$

nous aurons

$$\sin x + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cot A = n \sec H \sec h$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} x = n \sec H \sec h - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cot A;$$

d'où élevant au quarré

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \,(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} x) = n^2 \sec^2 H \sec^2 h + 4 \sin^4 \tfrac{1}{2} x \cot^2 A - 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cot A \,.\, n \,.\, \sec H \sec h;$$

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x - 4 \sin^4 \tfrac{1}{2} x - 4 \sin^4 \tfrac{1}{2} x \cot^2 A + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \cot A \,.\, n \,.\, \sec H \sec h = n^2 \sec^2 H \sec^2 h$$

$$\sin^4 \tfrac{1}{2} x - \left(\frac{1 + n \cot A \sec H \sec h}{\operatorname{cosec}^2 A}\right) \sin^2 \tfrac{1}{2} x = - \frac{n^2 \sec^2 H \sec^2 h}{4 \operatorname{cosec}^2 A}$$

$$\sin^4 \tfrac{1}{2} x - \sin^2 A (1 + n \cot A \sec H \sec h) \sin^2 \tfrac{1}{2} x = - \tfrac{1}{4} n^2 \sin^2 A \sec^2 H \sec^2 h,$$

et pour abréger, $\sin^4 \frac{1}{2} x - p \sin^2 \frac{1}{2} x = -\frac{1}{4} q^2$

$$\sin^4 \tfrac{1}{2} x - p \sin^2 \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4} pp = \tfrac{1}{4} pp - \tfrac{1}{4} qq;$$

d'où

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} p \pm \tfrac{1}{2} p \sqrt{1 - \frac{qq}{pp}} = \tfrac{1}{2} p \pm \tfrac{1}{2} p \left(1 - \frac{qq}{pp}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} p \pm \tfrac{1}{2} p \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{q^2}{p^2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \frac{q^4}{p^4} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{6} \frac{q^6}{p^6} - \&c.\right)$$

$$= + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{p} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \frac{q^4}{p^3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{6} \frac{q^6}{p^5} + \&c.$$

$$= \tfrac{1}{4} \frac{q^2}{p} \left(1 + \tfrac{1}{4} \frac{q^2}{p^2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{6} \frac{q^4}{p^4} + \&c.\right),$$

$$\text{et } \sin \tfrac{1}{2} x = \frac{\frac{1}{2} q}{p^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \tfrac{1}{8} \frac{q^2}{p^2}\right) = \frac{\frac{1}{2} q}{p^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{16} q^3}{p^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{et } 2 \sin \tfrac{1}{2} x = \frac{q}{p^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{8} q^3}{p^{\frac{3}{2}}} = \text{corde}.x;$$

mais

$$x = \text{corde } x + \tfrac{1}{24} (\text{corde } x)^3 = \frac{q}{p^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{8} q^3}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{24} q^3}{p^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = \frac{q}{p^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{8} q^3}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} q^3 p}{p^{\cdot\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{q}{p^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{8} q^3}{p^{\frac{3}{2}}} (1 + \tfrac{1}{3} p)$$

$$= \frac{n \sin A \sec H \sec h}{\sin A (1 + n \cot A \sec H \sec h)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{8} n^3 \sin^3 A \sec^3 H \sec^3 h}{\sin^3 A (1 + n \cot A \sec H \sec h)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{\frac{1}{24} n^3 \sin^3 A \sec^3 H \sec^3 h . \sin^2 A (1 + n \cot A \sec H \sec h)}{\sin^5 A (1 + n \cot A \sec H \sec h)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{n \sec H \sec h}{(1 + n \cot A \sec H \sec h)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{8} n^3 \sec^3 H \sec^3 h}{\sin^2 A (1 + n \cot A \sec H \sec h)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{24} n^3 \sec^3 H \sec^3 h}{(1 + n \cot A \sec H \sec h)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= n \sec H \sec h \, (1 - \tfrac{1}{2} n \cot A \sec H \sec h + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} n^2 \cot^2 A \sec^2 H \sec^2 h - \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{5}{6} \&c.)$$

$$+ \tfrac{1}{8} n^3 \sec^3 H \sec^3 h \operatorname{cosec}^2 A (1 - \tfrac{3}{2} n \cot A \sec H \sec h) + \tfrac{1}{24} n^3 \sec^3 H \sec^3 h (1 - \tfrac{3}{2} n \cot A \sec H \sec h)$$

$$= n \sec H \sec h - \tfrac{1}{2} n^2 \cot A \sec^2 H \sec^2 h + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} n^3 \cot^2 A \sec^3 H \sec^3 h - \&c.$$

$$+ \tfrac{1}{8} n^3 \sec^3 H \sec^3 h (1 + \cot^2 A)(1 - \tfrac{3}{2} n \cot A \sec H \sec h) + \tfrac{1}{24} n^3 \sec^3 H \sec^3 h (1 - \tfrac{3}{2} n \cot A \sec H \sec h)$$

$$= n \sec H \sec h - \tfrac{1}{2} n^2 \cot A \sec^2 H \sec^2 h + \tfrac{3}{8} n^3 \cot^2 A \sec^3 H \sec^3 h$$

$$+ \tfrac{1}{8} n^3 \cot^2 A \sec^3 H \sec^3 h + \tfrac{1}{6} n^3 \sec^3 H \sec^3 h$$

$$+ \tfrac{1}{24} n^3 \sec^3 H \sec^3 h$$

en négligeant n^4.

$$
\begin{aligned}
x &= n \sec \mathrm{H} \sec h - \tfrac{1}{2} n^2 \sec^2 \mathrm{H} \sec^2 h \cot \mathrm{A} + \tfrac{1}{2} n^3 \sec^3 \mathrm{H} \sec^3 h \cot^2 \mathrm{A} \\
&\quad + \tfrac{1}{6} n^3 \sec^3 \mathrm{H} \sec^3 h \\
&= n \sec \mathrm{H} \sec h - \tfrac{1}{2} (n \sec \mathrm{H} \sec h)^2 \cot \mathrm{A} + \tfrac{1}{2} (n \sec \mathrm{H} \sec h)^2 \cot^2 \mathrm{A} \\
&\quad + \tfrac{1}{6} (n \sec \mathrm{H} \sec h) \\
&= n \sec \mathrm{H} \sec h - \tfrac{1}{2} (n \sec \mathrm{H} \sec h)^2 \frac{\cot \mathrm{A}}{\sin 1''} + \tfrac{1}{2} (n \sec \mathrm{H} \sec h)^3 \left(\frac{\frac{1}{3} + \cot^2 \mathrm{A}}{\sin^2 1''} \right).
\end{aligned}
$$

Le plus souvent on peut s'en tenir au premier terme, et toujours il suffit du second. En tout cas, on voit combien il est facile de réunir les deux derniers termes en une table à double entrée.

En supprimant les deux derniers termes, et supposant $\sec \mathrm{H} \sec h = 1$, et mettant enfin dans la valeur de n les arcs au lieu des sinus, on auroit la formule du cit. Legendre. Cette approximation est en effet presque toujours suffisante; cependant il se trouve quelques cas où le facteur $\sec \mathrm{H} \sec h$ diffère sensiblement de l'unité : alors la formule du cit. Legendre ne peut plus servir. Ainsi dans un cas, extraordinaire à la vérité, mais arrivé au cit. Prony, l'erreur alloit à 12″.

La quantité n se calcule au moyen de deux tables d'un usage commode. La première donne pour chaque valeur de $(\mathrm{H} + h)$ et de $(\mathrm{H} - h)$, de minute en minute, la quantité $10000 \sin^2 \frac{1}{2} (\mathrm{H} \pm h)$. La seconde donne pour chaque valeur de A, de 10 minutes en 10 minutes, les quantités $0'',0001 \tang \frac{1}{2}$ A et $0'',0001 \cot \frac{1}{2}$ A. La table IIIe donne le facteur $\sec \mathrm{H} \sec h$. La table IVe donne la somme des deux termes suivans. Les argumens en sont $(n \sec \mathrm{H} \sec h)$ et A.

On aura donc ainsi, avec autant de facilité que d'exactitude, les trois angles du triangle sphérique qui passe par le pied ou le zénith des trois signaux observés; mais ces angles ne sont pas encore ceux dont on doit se servir. A moins qu'on ne veuille résoudre le triangle sphérique, et considérer les côtés comme autant d'arcs de grands cercles terrestres, ainsi que l'a pratiqué Boscowich, liv. IV, art. 274. Mais si l'on réduit les distances rectilignes des objets à des cordes d'une même sphère, à l'exemple de Bouguer, *Figure de la Terre*, p. 127 et 128, il faut

encore réduire les angles sphériques à ceux qui sont formés par les cordes des distances, considérées comme arcs de grands cercles. Quand j'ai trouvé ces formules, je n'avois pas encore lu les méthodes que le cit. Legendre a publiées dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1787.

Nous avons donc à résoudre ce problême : connoissant les angles d'un triangle sphérique, trouver les angles d'un triangle rectiligne formé par les trois cordes. Ce problême est l'inverse du précédent ; car il est évident que si l'on considère deux points de la surface d'une sphère, l'un se trouve au-dessous de l'horizon de l'autre d'un angle qui a pour mesure la moitié de l'arc du grand cercle, mené de l'un à l'autre point. Car on sait que l'angle formé par la corde et par la tangente a pour mesure la moitié de l'arc.

Nommons $2\,H$ l'arc de grand cercle mené du premier signal au second, $2\,h$ l'arc de grand cercle mené du premier signal au troisième, a l'angle sphérique formé par les arcs $2\,H$ et $2\,h$, A l'angle des cordes. Nous aurons la relation des arcs A et a par la formule (1)

$$\cos A = \cos a \cos H \cos h + \sin H \sin h.$$

Soit $A = (a + y)$, on aura

$$\cos a \cos y - \sin a \sin y = \cos a \cos H \cos h + \sin H \sin h$$

$$-\sin a \sin y + \cos a (1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} y) = \cos a \cos H \cos h + \sin H \sin h$$

$$\sin y - \cot a + 2\sin^2 \tfrac{1}{2} y \cot a = -\cot a \cos H \cos h - \operatorname{cosec} a \sin H \sin h$$

$$\sin y + 2\sin^2 \tfrac{1}{2} y \cot a = \cot a (1 - \cos H \cos h) - \operatorname{cosec} a \sin H \sin h$$

$$\begin{aligned} 2\sin \tfrac{1}{2} y \cos \tfrac{1}{2} y + 2\sin^2 \tfrac{1}{2} y \cot a &= \cot a [\sin^2 \tfrac{1}{2}(H+h) + \sin^2 \tfrac{1}{2}(H-h)] \\ &\quad - \operatorname{cosec} a [\sin^2 \tfrac{1}{2}(H+h) - \sin^2 \tfrac{1}{2}(H-h)] \\ &= -(\operatorname{cosec} a - \cot a) \sin^2 \tfrac{1}{2}(H+h) \\ &\quad + (\operatorname{cosec} a + \cot a) \sin^2 \tfrac{1}{2}(H-h) \\ &= -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \sin^2 \tfrac{1}{2}(H+h) \\ &\quad + \cot \tfrac{1}{2} a \sin^2 \tfrac{1}{2}(H-h) = m. \end{aligned}$$

2 sin

$$2\sin\tfrac{1}{2}y\sqrt{1-\sin^2\tfrac{1}{2}y}=m-2\sin^2\tfrac{1}{2}y\cot a$$

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}y-4\sin^4\tfrac{1}{2}y=m^2-4m\sin^2\tfrac{1}{2}y\cot a+4\sin^4\tfrac{1}{2}y\cot^2 a$$

$$4\sin^4\tfrac{1}{2}y+4\sin^4\tfrac{1}{2}y\cot^2 a-4\sin^2\tfrac{1}{2}y\,(1+m\cot a)=-m^2$$

$$4\sin^4\tfrac{1}{2}y\,(1+\cot^2 a)-4\,(1+m\cot a)\sin^2\tfrac{1}{2}y=-m^2$$

$$\sin^4\tfrac{1}{2}y-(1+m\cot a)\sin^2 a\sin^2\tfrac{1}{2}y=-\tfrac{1}{4}m^2\sin^2 a$$

$$\sin^4\tfrac{1}{2}y-p\sin^2\tfrac{1}{2}y=-\tfrac{1}{4}q^2$$

$$\sin^4\tfrac{1}{2}y-p\sin^2\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{4}p^2=\tfrac{1}{4}p^2-\tfrac{1}{4}q^2$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}y=\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-\tfrac{1}{4}q^2}=\tfrac{1}{2}p\pm\tfrac{1}{2}p\sqrt{1-\frac{q^2}{p^2}}=\tfrac{1}{2}p\pm\tfrac{1}{2}p\left(1-\frac{q^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{2}p\pm\tfrac{1}{2}p\left(1-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{p^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{q^4}{p^4}\cdot-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\frac{q^6}{p^6}-\text{\&c.}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{p}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{q^4}{p^3}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\frac{q^8}{p^5}+\text{\&c.}$$

$$=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{q^2}{p}\left(1+\tfrac{1}{4}\frac{q^2}{p^2}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\frac{q^4}{p^4}+\text{\&c.}\right)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}y=\frac{\tfrac{1}{2}q}{p^{\frac{1}{2}}}\left(1+\tfrac{1}{4}\frac{q^2}{p^2}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\frac{q^4}{p^4}+\text{\&c.}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\tfrac{1}{2}q}{p^{\frac{1}{2}}}\left(1+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{q^2}{p^2}\right)=\frac{\tfrac{1}{2}q}{p^{\frac{1}{2}}}+\frac{\tfrac{1}{16}q^3}{p^{\frac{5}{2}}}$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}y=\frac{q}{p^{\frac{1}{2}}}+\frac{\tfrac{1}{8}q^3}{p^{\frac{5}{2}}}$$

$$y=\frac{q}{p^{\frac{1}{2}}}+\frac{\tfrac{1}{8}q^3}{p^{\frac{5}{2}}}+\frac{\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}q^3}{p^{\frac{3}{2}}}=\frac{q}{p^{\frac{1}{2}}}+\frac{\tfrac{1}{8}q^3\,(1+\tfrac{1}{3}p)}{p^{\frac{5}{2}}}$$

$$y=\frac{m\sin a}{\sin a\,(1+m\cot a)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\tfrac{1}{8}m^3\sin^3 a\,(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}m\cot a)}{\sin^5 a\,(1+m\cot a)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{m}{(1+m\cot a)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\tfrac{1}{8}m^3\,(\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{3}m\cot a)}{\sin^2 a(1+m\cot a)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y=m\,(1-\tfrac{1}{2}m\cot a+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}m^2\cot^2 a-\text{\&c.})\;+$$

$$\left(\frac{\tfrac{1}{6}m^3+\tfrac{1}{24}m^4\cot a}{\sin^2 a}\right)(1-\tfrac{1}{2}m\cot a)$$

$$y=m-\tfrac{1}{2}m^2\cot a+\tfrac{3}{8}m^3\cot^2 a$$
$$+\tfrac{1}{6}m^3\operatorname{cosec}^2 a$$

$$=m-\tfrac{1}{2}m^2\cot a+\tfrac{3}{8}m^3\cot^2 a+\tfrac{1}{6}m^3+\tfrac{1}{6}m^3\cot^2 a$$

$$=m-\tfrac{1}{2}m^2\cot a+\tfrac{13}{24}m^3\cot^2 a+\tfrac{1}{6}m^3.$$

La différence entre les angles à l'horizon et les angles formés par les cordes étant toujours fort petite, on pourra sans erreur sensible faire

$$y = m = -\sin^2 \tfrac{1}{2}(H + h)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a + \sin^2 \tfrac{1}{2}(H - h)\cot \tfrac{1}{2}a.$$

Cette valeur de y étant de même forme que celle de x ci-dessus, on les prendra toutes deux dans les mêmes tables, en observant de prendre pour argument l'angle observé lorsqu'on voudra avoir x, et l'angle réduit à l'horizon lorsqu'on calculera y; mais la différence est assez petite pour être négligée ordinairement dans la pratique. On fera de plus attention que pour y, il faut changer les signes des tables.

Boscowich, liv. 2, art. 23 de sa Mesure du Degré, dit que, pour trouver une base par l'autre, on n'a besoin que des angles observés, sans autre correction que celle qui réduit l'angle au centre de la station. Cela seroit vrai si dans chaque station le point de centre et le point de mire étoient le même. Mais comme le point de mire est ordinairement plus élevé que le point de centre, il s'ensuit que les trois angles observés sont dans des plans différens, et que leur somme différera le plus souvent de 180°. D'ailleurs la réfraction terrestre suffiroit seule pour produire cet effet. Il est donc indispensable de réduire à l'horizon tous les angles observés, en employant dans le calcul les hauteurs apparentes des signaux.

Nommons δH et δh les différences de hauteur entre les centres des stations et les sommets des signaux, la différence entre les angles observés et les angles réduits au plan qui passe par les sommets des trois signaux, a pour expression la quantité suivante

$$\tfrac{1}{2}(\delta H + \delta h)\sin(H - \tfrac{1}{2}\delta H + h - \tfrac{1}{2}\delta h)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}A$$
$$- \tfrac{1}{2}(\delta H - \delta h)\sin[H - \tfrac{1}{2}\delta H - (h - \tfrac{1}{2}\delta h)]\cot \tfrac{1}{2}A.$$

Cette formule pourra servir à évaluer aussi l'effet de la réfraction terrestre sur l'angle observé, en mettant pour δH et δh la valeur de la réfraction terrestre. Cette formule se déduit facilement des deux précédentes.

Différence entre le côté d'un triangle et la somme des deux autres côtés.

Il est souvent impossible de mesurer directement la distance rectiligne entre les deux extrémités d'une base : on est réduit à mesurer deux lignes droites qui font entr'elles un angle très-approchant de 180°. C'est ce qui est arrivé à la mesure des bases de Melun et Perpignan. La même chose avoit eu lieu en 1740, à la base mesurée sur le bord de la mer, près l'étang de Leucate. Il faut donc chercher la différence entre la base brisée et la base véritable.

Soient b et c les deux lignes inclinées dont on veut connoître l'excès sur la droite d qui joint leurs extrémités, et A l'angle formé par les lignes b et c, on a F. 12.

$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, en supposant aigu l'angle A,

$$= (b+c)^2 - 2bc - 2bc \cos A = (b+c)^2 - 2bc(1 + \cos A)$$

$$= (b+c)^2 - 4bc \cos^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$= (b+c)^2 \left(1 - \frac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2}\right);$$

donc

$$d = (b+c)\left(1 - \frac{4bc}{(b+c)^3} \cos^2 \tfrac{1}{2} A\right)^{\frac{1}{2}} = (b+c)(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (b+c)\left(1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}x^3 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}x^4 - \text{\&c.}\right)$$

$$= (b+c) - (b+c)\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}x^4 + \text{\&c.}\right)$$

donc

$$(b+c) - d = (b+c)\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}x^4 \text{ \&c.}\right).$$

On fera donc $x = \dfrac{4bc \cos^2 \frac{1}{2} A}{(b+c)^2}$, et l'on aura par un calcul fort simple les différens termes de la série qui exprime l'excès de la somme des deux côtés sur le troisième.

Si l'angle A approche fort de 180°, la série sera fort convergente, et il suffira d'un petit nombre de termes. J'ai reconnu

que, pour nos deux bases, on peut se contenter des deux premiers, et que le second est même presque insensible.

Si l'on s'arrêtoit au premier, l'on auroit

$$(b + c) - d = \frac{2\,b\,c\cos^2\frac{1}{2}A}{(b + c)}.$$

La route de Liensaint à Melun est si large, qu'on a pu, sans gêner la voie publique, établir des massifs de maçonnerie aux deux termes de la base, et y placer d'énormes signaux qui y sont restés plus d'un an. Il n'en étoit pas de même pour la base de Perpignan. La route est beaucoup plus étroite; on ne pouvoit ôter à la voie publique l'espace nécessaire aux massifs destinés à conserver les deux termes. On vouloit cependant que ces termes fussent à l'abri de toute insulte et de toute dégradation, pour qu'on pût recommencer la mesure si on venoit à le trouver utile. Dans cette vue, on a placé les deux termes à côté de la route, et par-delà le fossé qui la borde à l'est. Par-là, il devenoit impossible de conduire la mesure de la base directement aux deux termes, parce que la ligne menée de l'un à l'autre passoit dans les terres cultivées, dans le fossé et dans la rivière de l'Agly. On a mesuré sur la route même une ligne brisée qui passoit à quelque distance des deux termes. Il en résulte qu'il faut appliquer plusieurs corrections à la ligne mesurée, pour connoître la distance rectiligne des deux termes, qui est la véritable base. Je vais exposer les moyens dont je me suis servi, soit dans l'observation, soit dans les calculs. J'ai choisi ceux qui m'ont paru les plus simples et les plus sûrs.

FIG. 17. Soient (*fig.* 17.) S et V les signaux de Salces et de Vernet, c'est-à-dire les deux termes de la base véritable. On a mesuré sur la route la ligne brisée ACB, qui forme en C un angle peu différent de 180°. Voici comme j'ai déterminé les points A et B.

J'ai placé la première des règles qui ont servi à sa mesure, en *nm*, sur la direction *n*C, de manière que la distance S*n* fût égale à la distance S*m*; ce dont je me suis assuré à plusieurs reprises avec un cordeau fixé en S, et amené successivement en *n* et en *m*. Il n'y a pas un millimètre d'incertitude sur l'éga-

lité de ces deux lignes. Cela fait, j'ai imaginé la perpendiculaire S A dans le triangle isocèle nSm. Ainsi, pour rapporter au point A la mesure de la ligne nC, commencée en n, il suffisoit de retrancher de nC la quantité nA, c'est-à-dire la moitié de la règle nm. J'ai de plus pour connoître S A mesuré avec soin le cordeau Sn. Mais quand il se seroit glissé une petite erreur dans cette mesure, elle n'affecteroit que S A, et il n'en résulteroit aucune erreur sensible sur la longueur de la véritable base S V. On voit que

$$SA = \sqrt{\overline{Sn}^2 - \overline{nA}^2} = \sqrt{(Sn + nA)(Sn - nA)}.$$

Vers l'autre terme, c'eût été un grand hasard si la dernière règle avoit été posée sur le terrein, de manière à former avec les deux distances au signal V un triangle isocèle. La perpendiculaire V B, au lieu de tomber sur le milieu de la règle, tomboit vers l'extrémité. Pour me procurer un triangle isocèle, j'ai placé une règle de plus sur le prolongement de CB. Cette règle étoit trop longue. Le cordeau Vp, amené vers l'extrémité de cette règle, y marquoit un point q, distant de quelques centimètres du point extrême u. J'ai mesuré uq avec une petite règle exactement divisée; j'ai mesuré de même le cordeau $Vp = Vq$, et j'ai pu calculer $pq = 2$ règles $- qu$. J'avois aussi

$$VB = \sqrt{\overline{Vp}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{pq}^2} = \sqrt{(Vp + \tfrac{1}{2}q)(Vp - \tfrac{1}{2}q)};$$

et pour rapporter au point B la mesure terminée en u, il suffisoit de retrancher de Cu la quantité $uq + \frac{1}{2}pq$.

uq n'étoit que de quelques centimètres; on pouvoit le déterminer avec précision : on avoit donc exactement pq. Quant à Vp, une petite erreur n'étoit d'aucune conséquence; mais il n'y a pas un millimètre de différence entre Vp et Vq.

On connoît donc maintenant les lignes droites AC et CB. Par la série ci-dessus, il est facile de déterminer AB. Voyons comment on peut en conclure la base SV.

Sur les prolongemens de A B (*fig.* 18.) j'abaisse les perpendiculaires Sa, Vb. Dans le triangle A C B, je calcule les angles FIG. 18.

A et B. Les angles CAS et CBV sont droits tous les deux. Ainsi

$SAa = 90° - CAB$ et $VBb = 90° - CBA$, $Sa = SA \sin SAa$, $Vb = VB \sin VBb$, $Aa = SA \cos SAa$, $Bb = VB \cos VBb$. On connoît donc la droite ab; elle seroit égale à la base véritable, si les perpendiculaires Sa et Vb étoient de même longueur. Je prends sur la plus grande $aa' = bV$, et je mène Va' égale et parallèle à ab. Il s'agit de trouver l'excès de VS sur Va'. Si nous prenons Va' pour rayon, VS sera la sécante de SVa'. Ainsi

$$VS - Va' = Va' \operatorname{tang} SVa' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} SVa' = Va' . \frac{a'S}{Va'} . \tfrac{1}{2} . \frac{a'S}{Va'} = \tfrac{1}{2} . \frac{(a'S)^2}{Va'}$$

sans erreur sensible.

Il ne reste plus qu'à réduire la base au niveau de la mer.

Soit R le rayon terrestre pour le niveau de la mer; $R + dR$ le rayon pour le sol de la base, dR étant l'élévation du sol au-dessus de la mer. Soit B la base mesurée, et b la base réduite. Nous aurons $R + dR : R :: B : b$; d'où

$$R + dR - R : R + dR :: B - b : B.$$

Ainsi

$$B - b = \frac{B\,dR}{R + dR} = \frac{\dfrac{B\,dR}{R}}{1 + \dfrac{dR}{R}}$$

$$B - b = \frac{B\,dR}{R}\left(1 - \frac{dR}{R} + \left(\frac{dR}{R}\right)^2 - \&c.\right)$$

$$= B\left(\frac{dR}{R}\right) - B\left(\frac{dR}{R}\right)^2 + B\left(\frac{dR}{R}\right)^3 - \&c.$$

C'est ce qu'il faut retrancher de B pour avoir la base réduite au niveau de la mer. On verra ci-après les méthodes par lesquelles j'ai calculé les différences du niveau de tous les signaux par rapport à l'horizon de la mer.

Les bases réduites à l'horizon sont véritablement des arcs qu'on peut supposer sphériques. En réduisant à l'horizon l'angle que forme la ligne brisée qui a été mesurée, on auroit, pour trouver la base sphérique véritable, à résoudre un triangle sphérique

dont on connoîtroit deux côtés, et l'angle compris. Le calcul d'un triangle sphérique est moins commode en général que celui d'un triangle rectiligne; j'ai donc retranché des deux parties de chaque base l'excès presque insensible de l'arc sur la corde. J'ai réduit aux cordes l'angle horizontal, et j'ai pris pour base véritable la corde qui joint les pieds des deux signaux ou les deux termes, et cette corde m'étoit donnée par la résolution d'un triangle rectiligne.

Les formules précédentes suffisent à la réduction des opérations géodésiques; passons aux corrections qu'il faut faire aux observations astronomiques.

Corrections des Distances au Zénith, observées près du Méridien.

Soit P le pôle (*fig.* 14.), Z le zénith, E l'étoile, PE sa distance au pôle, ZE la distance au zénith observée; prenons $Pe = PE$, Ze sera la distance au zénith dans le méridien FIG. 14.

$$Ze = ZP - PE = (90^\circ - L) - (90^\circ - D) = (D - L).$$

Il est visible que Ze est moindre que ZE.

Soit x la différence, $ZE = Ze + x = (D - L + x)$.

Le triangle sphérique ZPE donne

$$\cos ZE = \cos PE \cos PZ + \sin PE \sin PZ \cos P,$$

ou

$$\cos(D - L + x) = \sin D \sin L + \cos D \cos L \cos P = \sin D \sin L + \cos D \cos L - 2 \cos D \cos L \sin^2 \tfrac{1}{2} P,$$

ou

$$\cos(D - L) \cos x - \sin(D - L) \sin x = \cos(D - L) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} P \cos D \cos L$$

$$\cos(D - L) - 2 \cos(D - L) \sin^2 \tfrac{1}{2} x - \sin(D - L) \sin x = \cos(D - L) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} P \cos D \cos L,$$

$$\text{et } \sin x + 2 \cot(D - L) \sin^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin(D - L)}.$$

Il y a trois manières rigoureuses de résoudre cette équation. L'une donneroit la valeur exacte de $\sin x$, l'autre celle de $\sin \tfrac{1}{2} x$,

et la troisième celle de tang $\frac{1}{2} x$; mais les formules seroient trop compliquées pour la pratique.

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \frac{\sin x}{2 \cos \frac{1}{2} x};$$

donc $2 \sin^2 \frac{1}{2} x = \dfrac{2 \sin^2 x}{4 \cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin^2 x \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x$,

en négligeant $\frac{1}{2} \sin^2 x \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x$, qui est du quatrième ordre, nous aurons

$$\sin x + \tfrac{1}{2} \cot (D - L) \sin^2 x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D - L)},$$

ou pour abréger $\sin x + \frac{1}{2} b \sin^2 x = a$;
d'où

$$\sin^2 x + \frac{2}{b} \sin x = \frac{2a}{b}$$

$$\sin^2 x + \frac{2}{b} \sin x + \frac{1}{bb} = \frac{1}{bb} + \frac{2a}{b} = \frac{1 + 2ab}{bb}$$

$$\sin x = - \tfrac{1}{2} b \pm \frac{1}{b} \sqrt{1 + 2ab} = \frac{1}{b} [1 + (1 + 2ab)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= \frac{1}{b} (ab - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 4 a^2 b^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{6} 8 a^3 b^3 - \&c.)$$

$$= a - \tfrac{1}{2} a^2 b + \tfrac{1}{2} a^3 b^2 - \&c.$$

ou

$$\sin x = \left(\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D - L)}\right) - \tfrac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D - L)}\right)^2 \cot (D - L)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D - L)}\right)^3 \cot^2 (D - L),$$

ou sans erreur sensible

$$x = \left(\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D - L) \sin 1''}\right) - \tfrac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D - L) \sin 1''}\right)^2 \cot (D - L) \sin 1''$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D - L) \sin 1''}\right)^3 \cot^2 (D - L) \sin^2 1''.$$

Le troisième terme est toujours insensible; le second se calcule facilement, à l'aide du premier. Mais il est plus commode de

de calculer une table pour chacune des étoiles qu'on observe ; et nous allons en faciliter les moyens. Auparavant, remarquons que la valeur de x trouvée par la formule précédente, se retranche de la distance observée quand l'étoile passe entre le pôle et le zénith, suivant la figure. Ainsi, dans ce cas, nommant x la réduction au méridien, on a

$$x = -\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D-L)\sin 1''}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D-L)\sin 1''}\right)^2 \cot(D-L)\sin 1''$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D-L)\sin 1''}\right)^3 \cot^2(D-L)\sin^2 1''.$$

Si l'étoile passe au-dessous du pôle, il faut changer les signes de tous les termes, et celui de l'arc L ; en sorte qu'au lieu de $(D-L)$, il faut mettre $(D+L)$, ou plus exactement $[180° - (D+L)]$. En effet, on a dans ce cas

$$Ze = PZ + PE = 90° - L + 90° - D = 180° - (D+L).$$

On aura donc

$$x = +\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D+L)\sin 1''}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D+L)\sin 1''}\right)^2 \cot(D+L)\sin 1''$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(D+L)\sin 1''}\right)^3 \cot^2(D+L)\sin^2 1''.$$

Le second terme qui est au quarré ne devroit pas changer de signe ; la raison pour laquelle il en change est la substitution de $\cot(D+L)$ à $\cot[180° - (D+L)]$. Mais ce terme, malgré l'apparence, est positif comme les autres, parce que $(D+L) > 90°$. En effet, $Ze < 90°$; donc $180° - (D+L) < 90°$; donc $180° < 90° + (D+L)$; donc $90° < (D+L)$.

Si l'étoile passe au midi du zénith

$$Ze = PE - PL = 90° - D - 90° + L = L - D ;$$

à ce changement près, la formule est semblable à celle du premier cas, et l'on a

$$x = -\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(L-D)\sin 1''}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L}{\sin(L-D)\sin 1''}\right)^2 \cot(L-D)\sin 1'' - \&c.$$

Cette dernière formule peut servir pour le soleil comme

pour une étoile, en observant pour l'un comme pour l'autre de changer le signe de D, si la déclinaison de l'astre est anstrale.

Pour faciliter le calcul des tables, on remarquera que le premier terme n'a de variable que $\sin^2 \frac{1}{2} P$, et le second que $\sin^4 \frac{1}{2} P$, ainsi de suite. Les logarithmes de deux nombres consécutifs de la table ne varieront donc qu'à raison de la variation de log. $\sin^2 \frac{1}{2} P$ et log. $\sin^4 \frac{1}{2} P$. Ainsi, quand on aura le logarithme du premier nombre de la table, on aura ceux de tous les autres, en ajoutant successivement les différences des logarithmes de $\sin^2 \frac{1}{2} P$, $\sin^4 \frac{1}{2} P$. J'ai formé une table de ces différences pour chaque angle horaire en temps de $10''$ en $10''$.

Il suffit de calculer le second terme de minute en minute de temps; on en conclut les termes intermédiaires par une interpolation facile. Le troisième est toujours inutile; le quatrième, à plus forte raison, est insensible; ce qui prouve que nous avons pu négliger au commencement $\frac{1}{2} \sin^2 x \tang^2 \frac{1}{2} x$, qui est du même ordre.

Si l'on se contentoit du premier terme, qui suffit presque toujours, on pourroit écrire ainsi la formule

$$x = \mp \frac{\text{sin vers. } P}{(\tang D \mp \tang L) \sin 1''},$$

et cette formule serviroit à calculer des tables générales. L'argument seroit ($\tang D \mp \tang L$).

Pour construire les tables particulières de chaque étoile, on est obligé de supposer la déclinaison constante, et elle a une petite variation; la latitude bien connue, et il y a toujours à cet égard au moins une petite incertitude, ainsi que sur le temps du passage au méridien, ou sur la marche de la pendule. Il est donc à propos d'évaluer ces diverses erreurs.

L'équation $x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D \mp L)}$ donne d'abord

$$\frac{dx}{dP} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} P \cos \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D \mp L)} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P \cot \frac{1}{2} P \cos D \cos L}{\sin (D \mp L)} = x \cot \frac{1}{2} P.$$

Ainsi l'on a généralement pour tous les cas $dx = dP \sin x \cot \frac{1}{2} P$.

On élude cette erreur en prenant avant et après le passage un même nombre de distances au zénith; car après le passage $\cot \frac{1}{2} P$ change de signe, et par conséquent aussi dx; et s'il n'y a qu'une légère différence entre les P positifs et les P négatifs, l'erreur disparoîtra.

La même équation donne encore entre le pôle et le zénith

$$\frac{dx}{dD} = \frac{-2\sin^2\frac{1}{2}P\sin D\cos L}{\sin(D-L)} - \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L\cos(D-L)}{\sin^2(D-L)}$$

$$= \frac{-2\sin^2\frac{1}{2}P\sin D\cos L\sin(D-L) - 2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L\cos(D-L)}{\sin^2(D-L)}$$

$$\frac{dx}{dD} = -\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos L}{\sin^2(D-L)}(\sin^2 D\cos L - \sin D\cos D\sin L + \cos^2 D\cos L + \cos D\sin D\sin L)$$

$$= -\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos L}{\sin^2(D-L)}(\cos L) = -\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos^2 L}{\sin^2(D-L)}$$

$$= -\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L\cos L}{\cos D\sin^2(D-L)} = -\frac{x\cos L}{\cos D\sin(D-L)}.$$

Le signe $(-)$ montre que x diminue si D augmente.

Pour les passages au-dessous du pôle, on trouvera par un calcul semblable $dx = -\frac{dD\sin x\cos L}{\cos D\sin(D+L)}$.

Pour les passages au midi, on aura pareillement

$$dx = +\frac{dD\sin x\cos L}{\cos D\sin(L-D)};$$

x augmente avec la déclinaison.

La même équation donne encore

$$\frac{dx}{dL} = -\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\sin L}{\sin(D-L)} + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D\cos L\cos(D-L)}{\sin^2(D-L)}$$

$$= +\frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D}{\sin^2(D-L)}[\cos L\cos(D-L) - \sin L\sin(D-L)]$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos D}{\sin^2(D-L)}[\cos(D-L+L)] = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}P\cos^2 D}{\sin^2(D-L)}$$

et $dx = \frac{dL\sin x\cos D}{\cos L\sin(D-L)}$ entre le zénith et le pôle.

Au-dessous du pôle on auroit $dx = -\frac{dL \sin x \cos D}{\cos L \sin (D+L)}$, et au midi $dx = -\frac{dL \sin x \cos D}{\cos L \sin (L-D)}$.

dD et dL sont ordinairement de pen de secondes, et x de 3′ au plus. Ainsi $dD \sin x$ et $dL \sin x$ seront le plus souvent des quantités absolnment insensibles. Pendant le cours de l'observation d'une même étoile, D varie par la précession, l'aberration et la nutation, mais c'est d'nne quantité si petite, qu'on peut regarder la déclinaison comme constante dans l'intervalle; mais après quelques années, il faut refaire la table, ou la corriger par les formules ci-dessus.

Examen de l'Erreur qui peut résulter d'une petite inclinaison dans le cercle, lorsqu'on observe les distances au zénith.

Il est difficile de répondre de deux à trois minutes dans la verticalité de l'instrument avec lequel on a pris toutes les distances au zénith. Examinons l'errenr qui peut en provenir.

FIG. 15. Soit HO (*fig.* 15.) la direction du diamètre horizontal de l'instrument quand on observe l'étoile E. Le plan HEO sera le plan de l'instrument; et si le plan du cercle est vertical, le plan HEO sera perpendiculaire à l'horizon, et Z′E, distance de l'étoile au milieu de l'arc HEO, sera la distance de l'étoile an zénith; il n'y aura point d'erreur: mais si le plan du cercle est incliné, le plan HEO sera pareillement incliné à l'horizon. Alors soit HZO le vertical, et Z le zénith. L'arc ZZ′, dont les deux extrémités sont à 90° de distance des points H et O, aura pour pôles ces deux mêmes points, et ZZ′ mesurera l'angle ZOZ′, inclinaison du plan dn cercle. Z sera le vrai zénith, l'angle Z′ sera droit, et la distance observée Z′E sera la base d'un triangle sphérique rectangle ZZ′E, dont ZE ou la vraie distance au zénith sera l'hypoténuse. Il est évident que Z′E sera plus petit que ZE.

L'erreur ne se détruira pas par le retournement; le cercle penchera du côté opposé, mais toujours on observera la base au lieu de l'hypoténuse.

Or le triangle $ZZ'E$ donne

$$\cos ZZ' \cos Z'E = \cos ZE.$$

Soit $ZZ' = I =$ inclinaison, $Z'E = D$, $ZE = (D + x)$, nous aurons $\cos I \cos D = \cos(D+x) = \cos D \cos x - \sin D \sin x$, $\sin D \sin x = -\cos I \cos D + \cos D \cos x$ $\sin D \sin x = \cos D\,(\cos x - \cos I)$ $= \cos D\,(1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} x - 1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I)$ $= 2 \cos D\,(\sin^2 \tfrac{1}{2} I - \sin^2 \tfrac{1}{2} x)$, et $\sin x = 2 \cot D \sin^2 \tfrac{1}{2} I - 2 \cot D \sin^2 \tfrac{1}{2} x$, ou $\sin x + 2 \cot D \sin^2 \tfrac{1}{2} x = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cot D$, ou $\sin x + \tfrac{1}{2} \cot D \sin^2 x = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cot D$, ou $\sin^2 x + 2 \operatorname{tang} D \sin x = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} I$; d'où

$$\sin x = -\operatorname{tang} D + \operatorname{tang} D \sqrt{1 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cot^2 D}$$
$$= \operatorname{tang} D \left[-1 + (1 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cot^2 D)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$= (\tfrac{1}{2} 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cot^2 D - \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{4} 16 \sin^4 \tfrac{1}{2} I \cot^4 D + \&c.)$$
$$= 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cot D - 2 \sin^4 \tfrac{1}{2} I \cot^3 D + \&c.$$

Le premier terme de cette série est toujours suffisant, même à un degré de distance au zénith; c'est d'après cette formule que j'ai construit la table ci-jointe.

En divisant tous les nombres par 100, on aura la correction pour une minute d'inclinaison; et multipliant celle-ci par le quarré du nombre des minutes de l'inclinaison, on aura la correction convenable. Ainsi à 4° de distance au zénith, la correction pour 10' est de 12",48. Pour une minute elle se réduit à 0",1248; pour deux minutes elle est quadruple, ou 0",4992; noncuple pour 3', ainsi des autres.

Distance zénith.	Correction pour 10' d'inclinaison.
0	+ 600"
1	50
2	24,99
3	16,65
4	12,48
5	9,97
6	8,30
7	7,12
8	6,21
9	5,51
10	4,95
11	4,49
12	4,11
13	3,78
14	3,50
15	3,26
16	3,04
17	2,85
18	2,69
19	2,53
20	2,40
21	2,27
22	2,16
23	2,06
24	1,96
25	1,87
26	1,79
27	1,71
28	1,64
29	1,57
30	1,51
31	1,45
32	1,40
33	1,34
34	1,29
35	1,25
36	1,20
37	1,16
38	1,12
39	1,08
40	1,04
41	1,00
42	0,97
43	0,94
44	0,90
45	0,87
48	0,79
51	0,71
54	0,63
57	0,57
60	0,50
63	0,44
66	0,39
69	0,33
72	0,28
75	0 23
78	0,19
81	0,14
84	0,09
87	0,05
90	0,00

Pour l'étoile polaire à 37° du zénith, la correction pour 10′ est 1,16; pour 5′ elle est 0″,29.

Pour β de la petite ourse à 24°, la correction est 1″,96 pour 10′, et 0″,49 pour 5′.

Pour ζ de la grande ourse et la chèvre, à 4° environ, la correction seroit de 3″ pour 5′ d'inclinaison : il ne seroit donc pas sûr de faire usage de ces étoiles; il vaut mieux en prendre de plus voisines du pôle, l'erreur de la réfraction n'égalera pas celle qu'entraîneroit l'inclinaison, et l'observation sera beaucoup plus facile.

Latitude = 90° — dist. z ± dist. au pôle (au nord du zénith). Ainsi dans toutes les observations au nord, l'inclinaison augmente la latitude.

Latitude = dist. z ∓ déclin. de l'étoile (au midi).

Ainsi par les observations au midi, la latitude seroit diminuée par l'inclinaison, qui diminue toujours les distances au zénith, du moins quand elles ne passent pas 90°.

On pourroit donc observer des étoiles au nord et au midi à égales hauteurs, et on détruiroit l'effet de l'inclinaison; mais il faudroit être sûr de la déclinaison, ce qui est difficile, et que l'inclinaison fût à très-peu près la même, ce dont on ne peut répondre.

La latitude ne peut être affectée que de la moitié de l'erreur produite par l'inclinaison, parce que cette erreur est insensible dans les passages inférieurs : il n'est question ici que des étoiles circompolaires.

Il nous reste une question à examiner. A moins qu'une étoile ne soit très-brillante, comme celles de première grandeur, il est presque impossible de l'observer à la croisée des deux fils. On l'observe donc à quelque distance. Voyons l'erreur qui peut en résulter.

FIG. 16. Soit ZMH le vertical (*fig.* 16.), HOR l'horizon; au lieu d'observer au point M, l'intersection des fils, on observe au point N. Par les points M et N menez le grand cercle MNR. Ce cercle est celui du plan qui passe par l'œil, et le fil horizontal

de la lunette. La différence de Z N à Z M est l'erreur de l'observation, et cette erreur augmente toujonrs la distance au zénith

$$\cos Z M \cos M N = \cos Z N = \cos (Z M + x).$$

Cette équation est absolument la même que celle que nous avons eue ci-dessns pour l'inclinaison; on aura donc pareillement

$$x = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} M N \cot Z M.$$

La même table qui donne l'erreur produite par l'inclinaison, donnera anssi l'erreur commise en observant à quelque distance dn fil; mais ces deux erreurs sont de signes contraires pour les étoiles observées au nord : elles sont de mêmes signes pour les étoiles au midi. Comme il est presque impossible que le cercle n'ait une ou deux minutes d'inclinaison, on ne risque pas beauconp d'observer à 1′ ou 2′ de l'intersection, quand l'étoile est au nord. Si elle étoit au midi, il faudroit observer au plus près.

Ceci suppose que le fil soit bien horizontal, et il n'est pas aisé de le placer ainsi bien exactement.

Si le fil avoit une inclinaison, et qu'on observât à quelque distance de l'intersection I (*fig.* 19), par exemple en a, l'erreur seroit $ab = \mathrm{I}a \sin \mathrm{LI}l$. Soit $\mathrm{I}a = 2' = 120''$ $\mathrm{LI}l = 1^\circ$, $ab = 2''10$; ainsi 1° d'inclinaison et 1′ de distance donneroient 1″ d'erreur. FIG. 19.

Mais si l'on observe constamment au même point a, il n'y aura point d'erreur, car la lunette se renversant dans la deuxième observation, si la première distance observée est trop grande d'une seconde, la deuxième sera trop petite d'une même quantité, et il y aura compensation. Il n'y a donc qu'à mettre toujours à même distance du fil, et toujonrs du même côté; ce qui se fera de la manière suivante.

Supposons que dans l'observation impaire qui se fait à droite, j'aie mis l'étoile à quelque distance du fil, à ma droite, en apparence, dans la lunette qui renverse, il est clair que l'étoile sera placée entre le fil et le limbe du cercle; pour l'observation paire, qui se fait à gauche, je placerai l'étoile à même distance

du fil, mais à ma gauche, afin qu'elle se retrouve encore entre le fil et le limbe. Par ce moyen, l'on observera toujours au même point physique, et l'on détruira l'effet de l'inclinaison du fil; ce qui n'empêche pas qu'il ne faille mettre le fil horizontalement, autant qu'il est possible,

Calcul des Observations azimuthales.

Les observations azimuthales se font en prenant l'angle entre un astre et un objet terrestre. Quand on n'observe pas au centre de la station, ces observations ont besoin d'une réduction, comme les angles pris entre deux objets terrestres. On se sert de la même formule; mais il est à remarquer qu'elle se réduit toujours à un terme, parce que la distance à l'astre, qui est au dénominateur de l'autre terme, est comme infinie par rapport à la distance au centre de la station. Si l'astre est à gauche de l'objet terrestre, la formule se réduit au terme $+\frac{r\sin(O+y)}{b.D}$; $(O+y)$ est ici l'angle entre l'objet à droite et le centre de la station.

Si l'astre est à droite de l'objet terrestre, la formule se réduit au terme $-\frac{r\sin y}{b.G}$. Cette réduction s'applique à la différence d'azimuth entre l'astre et l'objet terrestre, comptée sur l'horizon,

FIG. 20. Soit maintenant NPZ le méridien (*fig.* 20.), N le point nord de l'horizon, P le pôle, Z le zénith, S le lieu vrai du soleil, S′ le lieu apparent; dans le triangle PZS, nous connoissons

$$PZ = \text{hauteur de l'équateur} = H,$$

$$PS = 90^\circ - \text{décl. de l'astre} = C,$$

et l'angle horaire $ZPS = P$; nous aurons ainsi cos ZS, ou

ou $\cos B = \cos P \sin H \sin C + \cos H \cos C$..............(1)

puis sin PZS, ou $\sin Z = \dfrac{\sin P \sin C}{\sin B}$................(2)

Soit r la réfraction et p la parallaxe de hauteur

$$ZS' = B' = B - r + p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Alors dans le triangle GZS', nous aurons

$S'G$ = distance observée $= D$, $ZS' = B'$, $ZG = A$.

Faites $R = \dfrac{A + B' + D}{2} - A$, et $R' = \dfrac{A + B' + D}{2} - B'$ FIG. 20

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} GZS' = \frac{\sin R \sin R'}{\sin A \sin B'} = \sin^2 \tfrac{1}{2} Z' \ldots\ldots\ldots (4)$$

C'est à cet angle GZS' qu'il faut appliquer la réduction au centre.

Enfin NZG = azimuth du signal observé $= Z - Z'$....(5)

Les cercles dont on s'est servi ne donnent pas les distances simples de l'astre à l'objet terrestre ; on ne peut les connoître tout au plus que de deux en deux : mais comme le mouvement de l'astre par rapport au signal est sensiblement uniforme pendant de petits intervalles de temps, on peut diviser l'arc parcouru, par le nombre des observations ; et l'arc moyen qui en résultera sera sensiblement la distance du soleil au signal pour l'instant moyen entre ceux de toutes les observations. Les calculs ont été faits en assemblant ces observations quatre à quatre, six à six, huit à huit, dix à dix, sans qu'on ait trouvé de différence sensible entre les résultats. Cependant, si l'on vouloit un procédé plus rigoureux, on pourroit faire le calcul de la manière suivante,

Le triangle ZPS donne

$$\cot MZS = \cot Z = \cot P \cos H - \frac{\cot C \sin H}{\sin P} \ldots\ldots (1)$$

$$\sin ZS = \sin B = \frac{\sin P \sin C}{\sin Z} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$ZS' = B' = B + \text{parallaxe} - \text{réfraction} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Soit A = MZC = azimuth du signal à-peu-près connu,

et compté du sud, le triangle G Z S donne

$$\cos GS' = \cos GZS' \sin ZG \sin ZS' + \cos ZG \cos ZS',$$

ou

$$\cos \Delta = \cos (A - Z) \sin F \sin B' + \cos F \cos B' \ldots\ldots (4)$$

Différentions cette formule par rapport à A seulement, nous aurons

$$d\Delta \sin \Delta = d(A - z) \sin (A - z) \sin F \sin B'$$

$$d\Delta = \frac{d(A-z)\sin(A-z)\sin F \sin B'}{\sin \Delta} = \frac{dA \sin(A-z) \sin F \sin B'}{\sin \Delta}.$$

$$\text{Soit } a = \frac{\sin(A-z)\sin F \sin B'}{\sin \Delta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

vous aurez $d\Delta = a\, dA$.

Calculons ces cinq formules pour chacune des observations.

Nommez $\Sigma\Delta$ la somme de tous les Δ, Σa la somme de tous les a, G l'arc parcouru sur le limbe, ou la somme de toutes les distances observées, vous aurez $G = \Sigma\Delta + dA\,\Sigma a$; d'où

$$dA = \frac{G - \Sigma\Delta}{\Sigma a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

On pourroit employer un procédé pareil pour déterminer le temps vrai par les hauteurs absolues d'un astre. Calculez pour chaque observation de hauteur la formule

$$\cos ZS = \cos B = \cos P \sin H \sin C + \cos H \cos C \ldots\ldots (1)$$

$$B' = B + \text{parallaxe} - \text{réfraction} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Faites la somme de tous les B', que je nomme $\Sigma.B'$.

Je suppose que l'on connoisse à 1 ou 2″ près le temps vrai, et par conséquent P.

$$dB \sin B = dP \sin P \sin H \sin C,$$

$$dB = \frac{dP \sin B \sin H \sin C}{\sin B} = a\, dP,$$

$$\text{vous aurez } a = \frac{\sin P \sin H \sin C}{\sin B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Soit $\Sigma.a$ la sommme des a, G l'arc parcouru

$$G = \Sigma.B' + dP.\Sigma.a;$$

$$\text{d'où } dP = \frac{G - \Sigma.B'}{\Sigma.a}, \text{ ou } dT = \frac{G - \Sigma B'}{15.\Sigma.a} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Calcul de toutes les parties de la Méridienne, en supposant la Terre sphérique.

Quand on a déterminé par observation la latitude du point extrême d'un arc terrestre, et l'inclinaison du premier côté des triangles par rapport à la méridienne, on peut en conclure par le calcul la latitude de tous les signaux, leurs azimuths vrais sur l'horizon l'un de l'autre, leur différence en longitude d'avec le point de départ, et enfin l'arc du méridien intercepté entre les parallèles des deux signaux extrêmes.

Nous allons d'abord résoudre tous ces problêmes en supposant la terre sphérique, et nous y appliquerons ensuite les légères corrections que nécessite la figure applatie de la terre.

Soit donc P le pôle, A le point de départ dont on a observé la latitude, PAM le méridien de ce lieu, PN le méridien qui passe par le signal le plus voisin B, ABQ l'arc sphérique terrestre qui passe par les deux signaux : on connoît par observation PA, complément de latitude, et l'angle PAB, supplément de BAM, azimuth observé du point B. On demande la latitude du point B, les angles B et P. Au lieu de chercher directement PB, il sera plus commode de déterminer la différence entre PA et PB, qui n'est jamais que de quelques minutes. FIG. 13.

Le triangle PAB donne

$$\cos PB = \cos A \sin PA \sin AB + \cos PA \cos AB,$$

$$\text{ou } \sin L' = \cos A \cos L \sin \delta + \sin L \cos \delta$$

$$\sin L - \sin L' = \sin L - \sin L \cos \delta - \sin \delta \cos A \cos L$$

$$= 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \sin L - \sin \delta \cos A \cos L.$$

Ou bien si l'on compte A extérieurement au triangle, c'est-

FIG. 13. à-dire qu'on mette, au lieu de cos A, sa valeur tirée de l'équation $A = 180° - z$

$$\sin L - \sin L' = \sin \delta \cos z \cos L + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \sin L$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(L - L') = \frac{\sin \delta \cos z \cos L + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \sin L}{\cos \tfrac{1}{2}(L + L')}$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(dL) = \frac{\sin \delta \cos z \cos L + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \sin L}{\cos (L - \tfrac{1}{2} dL)}$$

$$= \frac{\sin \delta \cos z \cos L + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \sin L}{\cos L \cos \tfrac{1}{2} dL + \sin L \sin \tfrac{1}{2} dL}$$

$$= \frac{\sin \delta \cos z \cos L + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \sin L}{\cos \tfrac{1}{2} \delta L (\cos L + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} dL \sin L)}$$

$$\sin dL = \frac{\sin \delta \cos z \cos L + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \sin L}{\cos L + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} dL \sin L}$$

$$= \frac{\sin \delta \cos z + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{tang} L}{1 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} dL \operatorname{tang} L}$$

$$\sin dL = (\sin \delta \cos z + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{tang} L)(1 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} dL \operatorname{tg} L + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} dL \operatorname{tg}^2 L - \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} dL \operatorname{tg}^3 L + \&c.)$$

On peut supprimer les $\operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} dL$, qui multipliées par $\sin \delta \cos z$, ne donneroient que des quantités du quatrième ordre.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} dL = \frac{\sin \tfrac{1}{2} dL}{\cos \tfrac{1}{2} dL} = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} dL \cos \tfrac{1}{2} dL}{2 \cos^2 \tfrac{1}{2} dL} = \frac{\sin dL}{2 \cos^2 \tfrac{1}{2} dL}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin dL (1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} dL)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin dL + \frac{\tfrac{1}{2} \sin dL \sin^2 \tfrac{1}{2} dL}{\cos^2 \tfrac{1}{2} dL}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin dL + \tfrac{1}{2} \sin dL \sin^2 \tfrac{1}{2} dL (1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} dL)$$

$= \tfrac{1}{2} \sin dL$, en négligeant les $\sin^3 dL$ par la même raison que ci-dessus.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} dL = (\tfrac{1}{2} \sin \delta \cos z + \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{tg} L)(1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} dL \operatorname{tg} L + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} dL \operatorname{tg}^2 L)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin \delta \cos z + \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{tang} L - \tfrac{1}{2} \sin \delta \cos z \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} dL \operatorname{tg} L$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin \delta \cos z + \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{tang} L - \tfrac{1}{4} \sin^2 \delta \cos^2 z \operatorname{tang} L$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin \delta \cos z + \tfrac{1}{4} \sin^2 \delta \sin^2 z \operatorname{tang} L$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} dL = \tfrac{1}{4} \sin^2 \delta \cos^2 z$$

$$\sin dL = (\sin\delta\cos z + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta\,\mathrm{tg}L)(1 - \tfrac{1}{2}\sin\delta\cos z\,\mathrm{tg}L - \tfrac{1}{4}\sin^2\delta\sin^2 z\,\mathrm{tg}^2L + \tfrac{1}{4}\sin^2\delta\cos^2 z\,\mathrm{tg}^2L)$$

$$= \sin\delta\cos z + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta\,\mathrm{tg}L - \tfrac{1}{2}\sin^2\delta\cos^2 z\,\mathrm{tg}L - \sin^2\tfrac{1}{2}\delta\sin\delta\cos z\,\mathrm{tg}^2L$$

$$- \tfrac{1}{4}\sin^3\delta\cos z\sin^2 z\,\mathrm{tang}^2L + \tfrac{1}{4}\sin^3\delta\cos^3 z\,\mathrm{tang}^2L$$

$$= \sin\delta\cos z + \tfrac{1}{2}\sin^2\delta\,\mathrm{tang}L - \tfrac{1}{2}\sin^2\delta\cos^2 z\,\mathrm{tang}L - \tfrac{1}{4}\sin^3\delta\cos z\,\mathrm{tang}^2L$$

$$+ \tfrac{1}{4}\sin^3\delta\cos^3 z\,\mathrm{tang}^2L - \tfrac{1}{4}\sin^3\delta\cos z\sin^2 z\,\mathrm{tang}^2L$$

$$\sin dL = \sin\delta\cos z + \tfrac{1}{2}\sin^2\delta\sin^2 z\,\mathrm{tang}L - \tfrac{1}{2}\sin^3\delta\cos z\sin^2 z\,\mathrm{tang}^2L \ldots\ldots$$

$$dL = (\sin\delta\cos z + \tfrac{1}{2}\sin^2\delta\sin^2 z\,\mathrm{tang}L - \tfrac{1}{2}\sin^3\delta\cos z\sin^2 z\,\mathrm{tg}^2L)\,\mathrm{cosec}\,1'' + (dL - \sin dL)$$

$$= \mathrm{cosec}\,1''(\sin\delta\cos z + \tfrac{1}{2}\sin^2\delta\sin^2 z\,\mathrm{tang}L - \tfrac{1}{2}\sin^3\delta\cos z\sin^2 z\,\mathrm{tang}^2L + \tfrac{1}{6}\sin^3\delta\cos^3 z).$$

Les deux derniers termes sont fort petits, et toujours de signes contraires. On peut les négliger quand on calcule dL en secondes : on les conserveroit pour calculer dL en toises. Nous aurons donc en secondes

$$dL = \mathrm{cosec}\,1''\,(\sin\delta\cos z + \tfrac{1}{2}\sin^2\delta\sin^2 z\,\mathrm{tang}\,L)$$

$$L' = L - dL = L - \left(\frac{\sin\delta\cos z + \tfrac{1}{2}\sin^2\delta\sin^2 z\,\mathrm{tg}L}{\sin 1''}\right)$$

En mettant $z = 180° - A$ dans la formule du cit. Legendre, elle devient

$$L' = L - \delta\cos z - \tfrac{1}{2}\delta^2\sin^2 z\,\mathrm{tg}L + \tfrac{1}{2}\delta^3\sin^2 z\cos z\,\mathrm{tg}^2L + \tfrac{1}{6}\delta^3\sin^2 z\cos z.$$

Nous différons sur le dernier terme $\tfrac{1}{6}\delta^3$ &c.

Cherchons maintenant la différence d'azimuth. Nous compterons les azimuths de 0° à 360°, en allant du midi à l'occident.

Le triangle PAB donne

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(B+A) = \frac{\cot\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}(PB - PA)}{\cos\tfrac{1}{2}(BP + PA)} = \frac{\cot\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}(L - L')}{\cos\tfrac{1}{2}(180° - \overline{L + L'})}$$

$$= \frac{\cot\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}(L - L')}{\sin\tfrac{1}{2}(L + L')},$$

$$\mathrm{et}\ \cot\tfrac{1}{2}(B+A) = \frac{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}P\sin\tfrac{1}{2}(L+L')}{\cos\tfrac{1}{2}(L - L')} = \mathrm{tang}\,[90° - \tfrac{1}{2}(B + A)]$$

$90° - \tfrac{1}{2}(B+A)$ est toujours un angle de quelques minutes ; ainsi

$$90° - \tfrac{1}{2}(B' + A) = \frac{\tfrac{1}{2}P\sin\tfrac{1}{2}(L + L')}{\cos\tfrac{1}{2}(L - L')}$$

$$B + A = 180° - \frac{P\sin\tfrac{1}{2}(L + L')}{\cos\tfrac{1}{2}(L - L')}$$

$$B = 180° - A - \frac{P\sin\tfrac{1}{2}(L + L')}{\cos\tfrac{1}{2}(L - L')} = 180° - 180° + z$$

$$- \frac{P\sin\tfrac{1}{2}(L + L')}{\cos\tfrac{1}{2}(L - L')} = z - \frac{P\sin\tfrac{1}{2}(L + L')}{\cos\tfrac{1}{2}(L - L')}.$$

FIG. 16. Cette formule donneroit la direction BA, comptée du point nord; ponr la compter du point sud, on y ajoutera 180°.

Ainsi $z' = 180° + z - \frac{P \sin \frac{1}{2} (L + L')}{\cos \frac{1}{2} (L - L')}$.

Le même triangle donne

$$\sin A : \cos L' :: \sin P : \sin AB, \text{ ou } \sin P = \frac{\sin \delta \sin z}{\cos L'};$$

d'où

$$z' = 180° + z - \frac{\sin \delta \sin z \sin \frac{1}{2}(L + L')}{\cos \frac{1}{2}(L - L') \cos L'} = 180° + z - \frac{\sin \delta \sin z \sin (L - \frac{1}{2} dL)}{\cos \frac{1}{2} dL \cos (L - dL)}$$

$$= 180° + z - \frac{\delta \sin z \sin \frac{1}{2}(L' + L' + dL)}{\cos L' \cos \frac{1}{2} dL}$$

$$= 180° + z - \frac{\delta \sin z}{\cos \frac{1}{2} dL} \left(\frac{\sin L' \cos \frac{1}{2} dL + \sin \frac{1}{2} dL \cos L'}{\cos L'} \right)$$

$$= 180° + z - \delta \sin z \text{ tang } L' - \delta \sin z \text{ tang } \frac{1}{2} dL,$$

formule très-simple, à laquelle il n'y a rien à ajouter pour l'applatissement, dont l'effet est insensible sur l'azimnth, comme on le verra par la suite.

$$z' = 180° + z - \delta \sin z \text{ tang } L' - \delta \sin z \left(\tfrac{1}{2} \sin \delta \cos z + \tfrac{1}{4} \sin^2 \delta \sin^2 z \text{ tg } L \right)$$

$$= 180° + z - \delta \sin z \text{ tg } L' - \tfrac{1}{4} \delta \sin \delta \sin 2z - \tfrac{1}{4} \delta \sin^2 \delta \sin^3 z \text{ tg } L. \quad (A)$$

mais

$$\text{tang} L' = \text{tg}(L - dL) = \frac{\text{tg} L - \text{tg} dL}{1 + \text{tg} L \text{ tg} dL} = (\text{tg} L - \text{tg} dL)(1 - \text{tg} dL \text{ tg} L + \text{tg}^2 dL \text{ tg}^2 L - \&c.)$$

$$= \text{tg} L - \text{tg} dL \text{ tg}^2 L + \text{tg}^2 dL \text{ tg}^3 L - \text{tg} dL + \text{tg}^2 dL \text{ tg} L - \&c.$$

$$= \text{tg} L - \text{tg} dL (1 + \text{tg}^2 L) + \text{tg}^2 dL \text{ tg} L (1 + \text{tg}^2 L)$$

$$= \text{tg} L - \frac{\text{tang } dL}{\cos^2 L} + \frac{\text{tang}^2 dL \text{ tang } L}{\cos^2 L}$$

$$= \text{tg} L - \frac{\sin \delta \cos z + \frac{1}{2} \sin^2 \delta \sin^2 z \text{ tang } L}{\cos^2 L} + \frac{\sin^2 \delta \cos^2 z \text{ tang } L}{\cos^2 L}.$$

$$= \text{tg} L - \frac{\sin \delta \cos z}{\cos^2 L} - \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \delta \sin^2 z \text{ tang } L}{\cos^2 L} + \frac{\sin^2 \delta \cos^2 z \text{ tang } L}{\cos^2 L}$$

$$= \text{tg} L - \frac{\sin \delta \cos z}{\cos^2 z} - \frac{\sin^2 \delta \text{ tang } L}{\cos^2 L} \left(\tfrac{1}{2} \sin^2 z - \cos^2 \zeta \right)$$

$$+ \text{tg} L - \frac{\sin \delta \cos z}{\cos^2 L} + \frac{\sin^2 \delta \text{ tang } L}{\cos^2 L} \left(1 - \sin^2 z - \tfrac{1}{2} \sin^2 z \right)$$

$$= \text{tg} L - \frac{\sin \delta \cos z}{\cos^2 L} + \frac{\sin^2 \delta \text{ tang } L}{\cos^2 L} \left(1 - \tfrac{3}{2} \sin^2 z \right);$$

donc

$$z' = 180^\circ + z - \delta \sin z \,\mathrm{tg}\, L + \frac{\delta \sin \delta \sin z \cos z}{\cos^2 L} - \frac{\delta \sin^2 \delta \sin z \,\mathrm{tang}\, L}{\cos^2 L}$$

$$+ \frac{\frac{1}{3} \delta \sin^2 \delta \sin^3 z \,\mathrm{tang}\, L}{\cos^2 L} - \tfrac{1}{4} \delta \sin \delta \sin 2z - \tfrac{1}{4} \delta \sin^2 \delta \sin^3 z \,\mathrm{tg} L$$

$$= 180^\circ + z - \delta \sin z \,\mathrm{tang}\, L + \tfrac{1}{2} \delta \sin \delta \sin 2z + \tfrac{1}{4} \delta \sin \delta \sin 2z$$

$$+ \tfrac{1}{2} \delta \sin \delta \sin 2z \,\mathrm{tg}^2 L - \delta \sin^2 \delta \sin z \,\mathrm{tg}\, L - \delta \sin^3 \delta \sin z \,\mathrm{tg}^3 L$$

$$+ \tfrac{1}{3} \delta \sin^2 \delta \sin^3 z \,\mathrm{tg}\, L + \tfrac{1}{3} \delta \sin^2 \delta \sin^3 z \,\mathrm{tg}^3 L - \delta \sin^2 \delta \sin^3 z \,\mathrm{tg}\, L$$

$$= 180^\circ + z - \delta \sin z \,\mathrm{tang}\, L + \tfrac{1}{2} \delta \sin \delta \sin 2z \left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{tang}^2 L\right)$$

$$- \delta \sin^2 \delta \sin z \,\mathrm{tg}\, L (1 + \mathrm{tg}^2 L) + \delta \sin^2 \delta \sin^3 z \,\mathrm{tg}\, L \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} \mathrm{tg}^2 L\right).$$

Cette formule est trop compliquée pour la pratique, il vaut mieux s'en tenir à la formule (A), dans laquelle on peut négliger le dernier terme, qui sera toujours insensible dans notre opération. On aura donc

$$z' = 180^\circ + z - \delta \sin z \,\mathrm{tang}\, L' - \tfrac{1}{4} \delta \sin \delta \sin 2z \ldots\ldots (B)$$

Le dernier terme se réduira facilement en une table à double entrée.

La formule B est commode, et d'une exactitude suffisante pour trouver la différence d'azimuth. Je vais en donner une qui est une série infinie, dont la loi est très-simple. Soient A, A' et A'' les trois angles d'un triangle sphérique quelconque, C, C' et C'' les côtés opposés; supposons une quantité x telle que $A + A' + A'' = 180^\circ + x$, ou

$$A' + A'' = 180^\circ - A + x = 180^\circ - (A - x)$$

$$\tfrac{1}{2}(A' + A'') = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(A - x);$$

Mais suivant une formule de Néper

$$\mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2}(A' + A'') = \frac{\cot \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(C' - C'')}{\cos \frac{1}{2}(C' + C'')}$$

donc

$$\frac{1 + \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} A \,\mathrm{tang}\, \frac{1}{2} x}{\mathrm{tang}\, \frac{1}{2} A - \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} x} = \frac{\cot \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(C' - C'')}{\cos \frac{1}{2}(C' + C'')}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(C' + C'') + \cos \tfrac{1}{2}(C' + C'') \,\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} A \,\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} x = \cot \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(C' - C'') \,\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} A$$

$$- \cot \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(C' - C'') \,\mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2} x$$

$$\mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2} x \,\mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(C' + C'') + \mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2} x \cot \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(C' - C'')$$

$$= \cos \tfrac{1}{2}(C' - C'') - \cos \tfrac{1}{2}(C' + C'') = 2 \sin \tfrac{1}{2} C' \sin \tfrac{1}{2} C''$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \frac{2\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(C'+C'') + \cot\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(C'-C'')}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''}{\cos\frac{1}{2}C'\cos\frac{1}{2}C''\operatorname{tg}\frac{1}{2}A - \sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''\operatorname{tg}\frac{1}{2}A + \cos\frac{1}{2}C'\cos\frac{1}{2}C''\cot\frac{1}{2}A + \sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''\cot\frac{1}{2}A}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''}{\cos\frac{1}{2}C'\cos\frac{1}{2}C''(\operatorname{tang}\frac{1}{2}A + \cot\frac{1}{2}A) - \sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''(\operatorname{tang}\frac{1}{2}A - \cot\frac{1}{2}A)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''}{2\cos\frac{1}{2}C'\cos\frac{1}{2}C''\operatorname{cosec}A + 2\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''\cot A}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}C'\operatorname{tang}\frac{1}{2}C''\sin A}{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}C'\operatorname{tang}\frac{1}{2}C''\cos A}$$

ou pour abréger $\operatorname{tang} y = \dfrac{m\sin A}{1 + m\cos A}$; d'où

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{m\,dA\cos A}{1 + m\cos A} + \frac{m^2\sin^2 A\,dA}{(1 + m\cos A)^2}$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{m dA\cos A + m^2 dA\cos^2 A + m^2 dA\sin^2 A}{(1 + m\cos A)^2} = \frac{m dA\cos A + m^2 dA}{(1 + m\cos A)^2}$$

$$\frac{dy}{dA} = \frac{m\cos A + m^2}{(1+m\cos A)^2(1+\operatorname{tg}^2 y)} = \frac{m\cos A + m^2}{(1+m\cos A)^2\left(1 + \frac{m^2\sin^2 A}{(1+m\cos A)^2}\right)}$$

$$= \frac{m\cos A + m^2}{(1+m\cos A)^2 + m^2\sin^2 A} = \frac{m\cos A + m^2}{1 + 2m\cos A + m^2\cos^2 A + m^2\sin^2 A}$$

$$= \frac{m\cos A + m^2}{1 + 2m\cos A + m^2}.$$

Soit

$$\frac{dy}{dA} = \frac{m\cos A + m^2}{1 + 2m\cos A + m^2} = \alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 + \delta m^4 + \&c.$$

$$\begin{aligned} = \alpha m + \beta m^2 &+ \gamma m^3 + \delta m^4 + \&c. \\ + 2\alpha\cos A\, m^2 &+ 2\beta\cos A\, m^3 + 2\gamma\cos A\, m^4 + \&c. \\ &+ \alpha m^3 + \beta m^4 + \&c. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 0 = \alpha m &+ \beta m^2 + \gamma m^3 + \delta m^4 + \&c. \\ -\cos A\, m &+ 2\alpha\cos A\, m^2 + 2\beta\cos A\, m^3 + 2\gamma\cos A\, m^4 + \&c. \\ &- m^2 + \alpha m^3 + \beta m^4 + \&c. \end{aligned}$$

d'où

d'où

$$\alpha = \cos A\,,\ \beta = 1 - 2\,\alpha \cos A = 1 - 2\cos^2 A = -\cos 2\,A$$
$$\gamma = -\alpha - 2\beta \cos A = -\cos A + 2\cos 2\,A \cos A = \cos 3\,A$$
$$\delta = -2\,\gamma \cos A - \beta = -2\cos 3\,A + \cos 2\,A = -\cos 4\,A$$

ainsi des autres; donc

$$\frac{dy}{dA} = m\cos A - m^2 \cos 2\,A + m^3 \cos 3\,A - m^4 \cos 4\,A$$

et $y = m\sin A - \tfrac{1}{2}\,m^2 \sin 2\,A + \tfrac{1}{3}\,m^3 \sin 3\,A - \tfrac{1}{4}\,m^4 \sin 4\,A$.

Il n'y a pas de constante à ajouter, parce que y et A deviennent zéro tous deux à la fois; donc

$$\tfrac{1}{2}x = \text{tg}\tfrac{1}{2}C'\text{tg}\tfrac{1}{2}C''\sin A - \tfrac{1}{2}(\text{tg}\tfrac{1}{2}C'\text{tg}\tfrac{1}{2}C'')^2\sin 2A + \tfrac{1}{3}(\text{tg}\tfrac{1}{2}C'\text{tg}\tfrac{1}{2}C'')^3\sin 3A - \tfrac{1}{4}\&\text{c}.\ (C)$$

$$\tfrac{1}{2}x = \left(\frac{A + A' + A'' - 180}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\text{surface du triangle sphérique.}\right)$$

Soit $\tfrac{1}{2}\,C' = \tfrac{1}{2}\,C'' = 45°$, on aura

$$A' = A'' = 90°,\quad \tfrac{1}{2}x = \frac{A + 180 - 180}{2} = \tfrac{1}{2}A,\quad x = A.$$

La série se changera en celle-ci

$$\tfrac{1}{2}\,A = \sin A - \tfrac{1}{2}\sin 2\,A + \tfrac{1}{3}\sin 3\,A - \tfrac{1}{4}\sin 4\,A,$$

formule connue.

Soit $A = 90°$

$$45° = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \&\text{c. formule connue.}$$

Soit à présent A l'azimuth connu, A' la différence en longitude, A'' sera l'azimuth cherché; nous aurons $C' = \delta$ et $C'' = 90° - L$, et par conséquent

$$\tfrac{1}{2}\,A + \tfrac{1}{2}\,A' + \tfrac{1}{2}\,A'' - 90° = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{tang}\,(45° - \tfrac{1}{2}\,L)\sin A$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{tang}^2\,(45° - \tfrac{1}{2}\,L)\sin 2\,A + \tfrac{1}{3}\,\&\text{c.}$$
$$A + A' + A'' - 180 = 2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{tang}\,(45° - \tfrac{1}{2}\,L)\sin A$$
$$- \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{tang}^2\,(45° - \tfrac{1}{2}\,L)\sin 2\,A + \tfrac{2}{3}\,\&\text{c.}$$

ou en comptant les azimuths du point sud de l'horizon

$$(180 - z) + P + (-180 + z') - 180 = 2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\delta\,\text{tang}(45° - \tfrac{1}{2}L)\sin z$$
$$+ \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{tang}^2\,(45° - \tfrac{1}{2}\,L)\sin 2\,z + \tfrac{2}{3}\,\&\text{c.}$$
$$(-180 + z') = z - P + 2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{tang}\,(45° - \tfrac{1}{2}L)\sin z + \&\text{c.}$$
$$z' = (180° - P) + z + 2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{tang}\,(45° - \tfrac{1}{2}\,L)\sin z$$
$$+ \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\,\delta\,\text{tang}^2\,(45° - \tfrac{1}{2}\,L)\sin 2\,z + \tfrac{2}{3}\,\&\text{c.}$$

Cette formule est moins commode que celle (B) trouvée ci-dessus ; mais on peut pousser l'approximation aussi loin qu'on veut. A l'ordinaire, il suffiroit de deux termes de la série.

La formule (C) pourroit servir à calculer l'excès des trois angles sur 180° dans les petits triangles sphériques que nous formons à la surface de la terre. Dans ce cas, on peut l'écrire ainsi

$$x = C' \text{ tang } \tfrac{1}{2} C'' \sin A - \&c.$$

Je suppose C' et C'' exprimé en secondes.

Cherchons maintenant une formule pour évaluer en toises la différence des parallèles de deux signaux.

Nous avons trouvé ci-dessus

$$\sin dL = \sin\delta \cos z + \tfrac{1}{2}\sin^2\delta \sin^2 z \text{ tg } L - \tfrac{1}{2}\sin^3\delta \cos z \sin^2 z \text{ tg}^2 L,$$

ou

$$\begin{aligned}\sin dL &= 2\sin\tfrac{1}{2}\delta\cos\tfrac{1}{2}\delta\cos z + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta\sin^2 z \text{ tang } L \\ &\quad - \sin\tfrac{1}{2}\delta\sin^2\delta\cos z\sin^2 z \text{ tang}^2 L \\ &= (\text{corde }\delta)\cos\tfrac{1}{2}\delta\cos z + (\text{corde }\delta)\sin\tfrac{1}{2}\delta\sin^2 z \text{ tang } L \\ &\quad - (\text{corde }\delta)\tfrac{1}{2}\sin^2\delta\cos z\sin^2 z \text{ tang}^2 L.\end{aligned}$$

La résolution des triangles nous a donné (corde δ) ; je l'appelle K.

$$\begin{aligned}\sin dL &= K\cos\tfrac{1}{2}\delta\cos z + K\sin\tfrac{1}{2}\delta\sin^2 z \text{ tg } L - 2K\sin^2\tfrac{1}{2}\delta\cos z\sin^2 z \text{ tg}^2 L \\ &= (K\cos\tfrac{1}{2}\delta)\cos z + (K\cos\tfrac{1}{2}\delta)\text{ tang }\tfrac{1}{2}\delta\sin^2 z \text{ tang } L \\ &\quad - 2K\sin^2\tfrac{1}{2}\delta\cos z\sin^2 z \text{ tang}^2 L \\ &= (K\cos\tfrac{1}{2}\delta\cos z) + (K\cos\tfrac{1}{2}\delta\cos z)\text{ tang }\tfrac{1}{2}\delta\sin z \text{ tg } z \text{ tg } L \\ &\quad - 2(K\cos\tfrac{1}{2}\delta\cos z)\sin\tfrac{1}{2}\delta\text{ tang }\tfrac{1}{2}\delta\sin^2 z \text{ tang}^2 L.\end{aligned}$$

K étant donné en toises, ou autres mesures équivalentes, on aura sin dL, ou le sinus de la différence des parallèles, exprimé en pareilles mesures. Pour avoir dL lui-même, ou la différence des parallèles, il suffit d'ajouter à cette expression l'excès de l'arc sur le sinus, c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{6}\sin^3 dL = \tfrac{1}{6}\left(\frac{(K\cos\tfrac{1}{2}\delta\cos z)^3}{R^2}\right),$$

R étant le rayon de la terre exprimé en mêmes mesures que K.

On peut aussi faire $\frac{1}{6}\sin^3 dL = \frac{2}{3}(K \sin^2 \frac{1}{2}\delta \cos^2 \frac{1}{2}\delta \cos^3 z)$.
Ainsi nous aurons

$$dL = (K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z) + (K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\delta \sin z \operatorname{tg} z \operatorname{tg} L$$
$$- 2(K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z) \sin \tfrac{1}{2}\delta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta \sin^2 z \operatorname{tg}^2 L + \tfrac{2}{3}(K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z) \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta \cos^2 \tfrac{1}{2}\delta \cos^2 z.$$

On calculera par cette formule la différence en toises entre chacun des signaux; et ajoutant ensuite ces différences les unes aux autres, on aura la différence entre les parallèles extrêmes, c'est-à-dire l'arc du méridien.

Cette méthode me paroît la plus simple et la plus commode que comporte la nature du problême; elle ne demande aucnne figure, aucune attention particulière, si ce n'est aux signes algébriques des sinus, tangentes, &c. elle porte avec elle sa vérification. En effet, soient ABCD (*fig.* 21.) qnatre signaux voisins quelconqnes. La différence des parallèles entre A et D peut se tronver de deux manières; car elle est également la somme des différences entre A et B et entre B et D d'une part, et à la somme des différences entre A et C et entre C et D de l'autre part. C'est ainsi que le calcul a été fait double depuis Dunkerque jusqu'à Montjony. FIG. 21.

Si l'on vent savoir l'effet que produira snr l'arc du méridien, en mètres, une erreur commise sur l'azimuth, il suffira de différentier le premier terme de la formule, et l'on aura

$$d(K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z) = -(K \cos \tfrac{1}{2}\delta \sin z\, dz) = -(K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z) \operatorname{tg} z\, dz.$$

En déterminant ponr chaque partie de la méridienne le coefficient de dz dans la formule précédente, on aura l'erreur prodnite dans la longueur de cet arc partiel, par une erreur dz commise snr l'azimuth du point de départ. En additionnant tous ces coefficiens, on aura l'erreur de l'arc entier, en supposant dz constant pour toute la snite des triangles. Ainsi, en supposant 15″ d'erreur sur l'azimnth de Dunkerque, l'erreur de l'arc entier dn méridien entre les parallèles de Dunkerqne et Barcelonne, sera d'un mètre environ, c'est-à-dire de $\frac{1}{1100000}$.

Formules pour exprimer en fonction de la latitude toutes les parties de l'ellipse du Méridien terrestre.

Avant de donner les corrections dues aux formules précédentes à raison de l'applatissement de la terre, nous allons rassembler plusieurs expressions qui serviront à les démontrer. Par occasion, nous en donnerons quelques autres qui peuvent avoir leur utilité dans les calculs astronomiques.

FIG. 22. Soit DE (*fig.* 22) le diamètre de l'équateur; $CE = \frac{1}{2}DE = 1$, DPE la moitié du méridien elliptique, CP le demi-petit axe $= b$, DP'E le demi-cercle circonscrit; aF l'ordonnée au cercle; sa partie AF sera l'ordonnée à l'ellipse, aT la tangente au point a du cercle, AT sera la tangente au point A de l'ellipse. Menez le rayon Ca, il sera perpendiculaire à aT; menez AM perpendiculaire à AT, l'angle ALT = FAT = latitude du point A, aCT = FaT = latitude du point a dans la sphère circonscrite. Soit

$$FAT = L, \quad FaT = \lambda,$$

$$\text{tang } ATF = \frac{AF}{FT}, \quad \text{tang } aTF = \frac{aF}{FT};$$

donc

$$\text{tang } ATF : \text{tang } aTF :: AF : aF :: b : 1.$$

ou

$$\cot L : \cot \lambda :: b : 1 :: \text{tang } \lambda : \text{tang } L;$$

d'où

$$\text{tang } \lambda = b \text{ tang } L \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$AF = b.aF = b \sin\lambda = b\cos\lambda\,\text{tang}\lambda = \frac{b\,\text{tang}\lambda}{\sec\lambda} = \frac{b\,\text{tang}\lambda}{(1+\text{tang}^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{b^2\,\text{tang}\,L}{(1+b^2\text{tang}^2L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-e^2)\,\text{tang}\,L}{[1+(1-e^2)\text{tg}^2L]^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-e^2)\,\text{tang}\,L}{(1+\text{tg}^2L-e^2\text{tg}^2L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(1-e^2)\,\text{tang}\,L}{\left(\frac{1}{\cos^2L}-\frac{e^2\sin^2L}{\cos^2L}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-e^2)\cos L\,\text{tg}L}{(1-e^2\sin^2L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-e^2)\sin L}{(1-e^2\sin^2L)^{\frac{1}{2}}} \ldots (2)$$

$$CF = \cos\lambda = \frac{1}{\sec\lambda} = \frac{1}{(1+\text{tg}^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1+b^2\text{tg}^2L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos L}{(1-e^2\sin^2L)^{\frac{1}{2}}} \,(3)$$

CF est l'abscisse ou le rayon du parallèle, et AF l'ordonnée.

$$AT = AF \sec L = \frac{(1-e^2)\,\text{tang}\,L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \text{tangente à l'ellipse} \ldots (4)$$

$$FT = AF\,\text{tang}\,L = \frac{(1-e^2)\sin L\,\text{tang}\,L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (5)$$

$$LF = AF \cot L = \frac{(1-e^2)\sin L \cot L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-e^2)\cos L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots (6)$$

$$LT = AT\,\text{cosec}\,L = \frac{(1-e^2)\,\text{tg}\,L\,\text{cosec}\,L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-e^2)}{\cos L\,(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots (7)$$

$$CT = \sec \lambda = \frac{1}{\cos\lambda} = \frac{1}{CF} = \frac{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}{\cos L} \ldots\ldots (8)$$

$$AL = LF \sec L = \frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (9)$$

$$CL = CF - LF = \frac{\cos L - (1-e^2)\cos L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^2\cos L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots (10)$$

$$CM = CL\,\text{tang}\,L = \frac{e^2\sin L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (11)$$

$$LM = CL \sec L = \frac{e^2}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (12)$$

$$AM = AL + LM = \frac{1-e^2+e^2}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots (13)$$

$$At = AM \cot L = \frac{\cot L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (14)$$

$$Ct = CT \cot L = \frac{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}\cot L}{\cos L} = \frac{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}{\sin L} \ldots (15)$$

$$aA = aF - AF = \sin\lambda - b\sin\lambda = (1-b)\sin\lambda = \frac{(1-b)}{\mathrm{cosec}\,\lambda}$$

$$= \frac{(1-b)}{(1+\cot^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-b)}{\left(1+\frac{\cot^2 L}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-b)\,b}{(b^2+\cot^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(b-b^2)}{(1-e^2+\cot^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(b-b^2)}{(\mathrm{cosec}^2 L - e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(b-b^2)\sin L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

$$\overline{CA}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{CF}^2 = \frac{(1-e^2)^2\sin^2 L}{1-e^2\sin^2 L} + \frac{\cos^2 L}{1-e^2\sin^2 L}$$

$$= \frac{(1-2e^2+e^4)\sin^2 L+\cos^2 L}{1-e^2\sin^2 L} = \frac{\sin^2 L-(2e^2-e^4)\sin^2 L+\cos^2 L}{1-e^2\sin^2 L}$$

$$= \frac{1-(2e^2-e^4)\sin^2 L}{1-e^2\sin^2 L} = \frac{1-e^2\sin^2 L-(e^2-e^4)\sin^2 L}{1-e^2\sin^2 L}$$

$$= 1 - \frac{(e^2-e^4)\sin^2 L}{1-e^2\sin^2 L};$$ d'où

$$CA = \left(1 - \frac{e^2(1-e^2)\sin^2 L}{1-e^2\sin^2 L}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Or, [*formule* (2)], $b^2\sin^2\lambda = \frac{(1-e^2)^2\sin^2 L}{1-e^2\sin^2 L}$; donc

$$\sin^2\lambda = \frac{(1-e^2)\sin^2 L}{1-e^2\sin^2 L};$$

donc $CA = (1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}$. Soit donc $\sin u = e\sin\lambda$, et l'on aura $CA = \cos u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$

Soit un angle B, tel que $\cos B = b$, on aura $\tan\lambda = \cos B \tan L$; d'où, suivant une formule du cit. Lagrange,

$$L-\lambda = \tan^2 \tfrac{1}{2}B \sin 2L - \tfrac{1}{2}\tan^4 \tfrac{1}{2}B \sin 4L + \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^6 \tfrac{1}{2}B \sin 6L - \&c.$$

mais puisque $\cos B = b$, on a $1-b = 1-\cos B = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}B$, et $\sin^2 \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}b$, $\cos^2 \tfrac{1}{2}B = 1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}B = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}b$;

donc $\tan^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b} = \frac{1-b}{1+b}$; donc

$$L-\lambda = \left(\frac{1-b}{1+b}\right)\sin 2L - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2 \sin 4L + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^3 \sin 6L - \&c. \ldots (19)$$

Soient en général m et n les deux nombres qui expriment le rapport des axes de l'ellipse; $b = \frac{n}{m}$,

$$\frac{1-b}{1+b} = \frac{1-\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{1}{m+n};$$

car ordinairement on prend pour m et n deux nombres qui ne diffèrent que de l'unité.

$$\text{Donc } L - \lambda = \left(\frac{1}{m+n}\right) \sin 2\,L - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{m+n}\right)^2 \sin 4\,L$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{m+n}\right)^3 \sin 6\,L - \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Cette expression est très-convergente, rarement on a besoin du second terme, et jamais du troisième. Duséjour a fait un grand usage de λ, et il a donné une table de $L - \lambda$; mais la manière dont il l'a calculée est moins commode que la série précédente.

$$\text{tang } ACF = \frac{AF}{CF} = \frac{(1-e^2)\sin L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}{\cos L}$$
$$= (1-e^2)\text{ tang } L = b^2 \text{ tang } L \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Soit $1 - e^2 = \cos B'$, et $ACF = l$, nous aurons

$$\text{tang } l = \cos B' \text{ tang } L,$$

$$\text{et } L - l = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} B' \sin 2L - \tfrac{1}{2} \text{tang}^4 \tfrac{1}{2} B' \sin 4L + \tfrac{1}{3} \text{tg}^6 \tfrac{1}{2} B' \sin 6L - \&c.$$

Or $2\sin^2 \frac{1}{2}B' = 1 - \cos B' = e^2$, $\sin^2 \frac{1}{2}B' = \frac{1}{2}e^2$, $\cos^2 \frac{1}{2}B' = 1 - \frac{1}{2}e^2$

$$\text{et tang}^2 \tfrac{1}{2} B' = \frac{\frac{1}{2}e^2}{1-\frac{1}{2}e^2} = \frac{e^2}{2-e^2} = \frac{1-b^2}{1+b^2} = \frac{1-\frac{n^2}{m^2}}{1+\frac{n^2}{m^2}}$$
$$= \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{(m+n)(m-n)}{m^2+n^2} = \frac{m+n}{m^2+n^2};$$

$$\text{donc } L - l = \left(\frac{m+n}{m^2+n^2}\right) \sin 2\,L - \tfrac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m^2+n^2}\right)^2 \sin 4\,L$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{m+n}{m^2+n^2}\right)^3 \sin 6\,L - \&c.\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

$L - l$ est l'angle de la verticale avec le demi-diamètre. On en fait usage dans le calcul des parallaxes ; il est le complément de l'angle que fait la courbe avec le rayon CA.

Les séries (20) et (22) donnent l'arc en parties du rayon. Pour l'avoir en secondes, on divisera chaque terme par sin 1″.

Soit AA′ l'élément de la courbe EA ou $AA' = dA$, $A'u = dA \sin L$; mais

$$A'u = -dCF = -d\left(\frac{\cos L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}\right) = -\left(\frac{d\cos L}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}\cos L\, d(1-e^2\sin^2 L)}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{(1-e^2)\sin L\, dL}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}};$$

donc

$$\frac{dA}{dL} = (1-e^2)(1-e^2\sin^2 L)^{-\frac{3}{2}} = \underline{\text{rayon de courbure du méridien}}\ldots(23)$$

$$\text{d'où } \frac{dA}{dL}\cdot\frac{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)} = 1 = \text{rayon de l'équateur}\ldots\ldots(24)$$

Cette formule suppose dA et dL exprimés en parties du rayon. Mais si dA est exprimé en mètres, toises ou autres mesures pareilles, le rayon de l'équateur sera exprimé en mesures semblables.

Développons la formule (23), nous aurons

$$\frac{\left(\frac{dA}{dL}\right)}{(1-e^2)} = 1 + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 L + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}e^4\sin^4 L + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}e^6\sin^6 L + \&c.$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1.2^2}e^2 + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{4.3}{1.2.2^4}e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3.2^6}e^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4.2^8}e^8 + \&c.$$

$$-\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^2 + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{4}{2^3}e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{6.5}{1.2.2^5}e^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{8.7.6}{1.2.3.2^7}e^8 + \&c.\right)\cos 2\,L$$

$$+\left(\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{1}{2^3}e^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{6}{1.2^5}e^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{8.7}{1.2.2^7}e^8 + \&c.\right)\cos 4\,L$$

$$-\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^5}e^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{8}{1.2^7}e^8 + \&c.\right)\cos 6\,L$$

$$+\left(\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{2^7}e^8 + \&c.\right)\cos 8\,L$$

$$- \&c.$$

La

La loi de cette série est évidente, on peut la continuer tant qu'on voudra. En intégrant, on aura

$$\frac{A}{1-e^2}=\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1.2^2}e^2+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{4.3}{1.2.2^4}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3.2^6}e^6+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4.2^8}e^8+\&c.\right)L$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^2+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{4}{2^3}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{6.5}{1.2.2^5}e^6+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{8.7.6}{1.2.3.2^7}e^8+\&c.\right)\sin 2L$$
$$+\tfrac{1}{4}\left(\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{1}{2^3}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{6}{1.2^5}e^6+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{8.7}{1.2.2^7}e^8+\&c.\right)\sin 4L$$
$$-\tfrac{1}{6}\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^5}e^6+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{8}{1.2^7}e^8+\&c.\right)\sin 6L$$
$$+\tfrac{1}{8}\left(\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{2^7}e^8+\&c.\right)\sin 8L \ldots\ldots\ldots (25)$$
$$-\&c.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, parce que A et L deviennent zéro en même temps. Cette série donnera la valeur d'un arc quelconque commençant à l'équateur, et terminé au point dont la latitude est L; elle se réduira au premier terme si $L = 90°$.

Soit pour abréger

$$\frac{A}{1-e^2}=\alpha L-\beta\sin 2L+\gamma\sin 4L-\delta\sin 6L+\epsilon\sin 8L-\&c.$$

Soit un autre arc A′ dont la latitude extrême soit L′, on aura de même

$$\frac{A'}{1-e^2}=\alpha L'-\beta\sin 2L'+\gamma\sin 4L'-\delta\sin 6L'+\epsilon\sin 8L'-\&c.$$

d'où

$$\frac{A-A'}{1-e^2}=\alpha(L-L')-\beta(\sin 2L-\sin 2L')+\gamma(\sin 4L-\sin 4L')$$
$$-\delta(\sin 6L-\sin 6L')+\&c.$$
$$=\alpha(L-L')-2\beta\sin(L-L')\cos(L+L')+2\gamma\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')$$
$$-2\delta\sin 3(L-L')\cos 3(L+L')+\&c.$$

Soit Q le quart du méridien $\frac{Q}{1-e^2}=\alpha.90°$;

donc

$$\frac{Q}{A-A'}=\frac{\left(\frac{Q}{1-e^2}\right)}{\left(\frac{A-A'}{1-e^2}\right)}=\frac{\alpha.90°}{\alpha(L-L')-2\beta\sin(L-L')\cos(L+L')+2\gamma\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')-\&c.}$$

ou $\dfrac{Q}{A - A'}$

$$= \frac{90^\circ}{(L-L') - \frac{2\beta}{\alpha}\sin(L-L')\cos(L+L') + \frac{2\gamma}{\alpha}\sin 2(L-L')\cos 2(L+L') - \frac{2\delta}{\alpha}\sin 3(L-L')\cos 3(L+L') + \&c.} \quad (26)$$

En nous bornant aux e^6, qui suffiront toujours,

$$\alpha = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6$$

$$\beta = \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{525}{1024}e^6$$

$$\gamma = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6$$

$$\delta = \frac{35}{3072}e^6$$

$$\frac{2\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{111}{512}e^6$$

$$\frac{2\gamma}{\alpha} = \frac{15}{128}e^4 + \frac{15}{128}e^6$$

$$\frac{2\delta}{\alpha} = \frac{35}{1536}e^6$$

On peut même négliger les e^6, qui ne font pas une toise ou deux mètres sur le quart du méridien; nous aurons donc

$$Q = \frac{(A-A')90^\circ}{L-L'}\left(1 + \left(\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4\right)\frac{\sin(L-L')\cos(L+L')}{(L-L')} - \tfrac{15}{128}e^4\frac{\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')}{(L-L')}\right) .. (27)$$

Dans cette formule, Q sera exprimé en toises, comme (A—A'); pour l'avoir en lignes il faudra multiplier le second membre par 864.

Soit m le mètre exprimé en lignes

$$m = \frac{0.0000864\,(A-A')\,(1.5707963267\,95)}{(L-L')}$$

$$\times\left(1 + \left(\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4\right)\frac{\sin(L-L')\cos(L+L')}{(L-L')} - \tfrac{15}{128}e^4\frac{\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')}{(L-L')}\right) ..... (28)$$

$$= \frac{0.000135716802635\,(A-A')}{(L-L')}$$

$$\times\left(1 + \left(\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{4}e^4\right)\frac{\sin(L-L')\cos(L+L')}{(L-L')} - \tfrac{15}{128}e^4\frac{\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')}{(L-L')}\right) ..... (29)$$

Si l'on a deux arcs différens pour calculer la valeur du mètre, on pourra dans le calcul laisser indéterminées les valeurs de e^2 et e^4, et l'on en tirera la valeur de e^2, en résolvant une équation du second degré.

Si l'applatissement étoit nul, la valeur du mètre se réduiroit au premier terme. Les deux termes suivans sont donc la correction due au mètre, calculé dans l'hypothèse sphérique, à raison de l'applatissement.

Si l'on avoit $L + L' = 90^\circ$, le premier des deux termes s'évanouiroit ; et la correction d'applatissement seroit

$$+ \frac{0.0001357168\,(A - A')}{(L - L')} \cdot \tfrac{15}{128} e^4 \frac{\sin 2\,(L - L')}{(L - L')},$$

quantité presque insensible.

Or la latitude de Montjouy est ...... $41^\circ\, 21'\, 45'' = L'$
Celle de mon observatoire de Bruyères $48\;\; 35\;\; 47 = L$
La somme des latitudes........ $89\;\; 57\;\; 32 = L + L'$,

ce qui diffère très-peu de 90°. Ainsi l'arc entre Montjouy et Bruyères donneroit le mètre indépendamment de l'applatissement, en supposant toutefois que le méridien est elliptique.

$$\begin{aligned} Q = \alpha(1 - e^2)\, 90^\circ &= (1 - e^2)(90^\circ)\left(1 + \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{45}{64} e^4 + \tfrac{175}{256} e^6\right) \\ &= 90^\circ \left(1 - \tfrac{1}{4} e^2 - \tfrac{3}{64} e^4 - \tfrac{5}{256} e^6\right) \ldots\ldots\ldots (30) \end{aligned}$$

donc

$$\tfrac{1}{90}(Q) = 1^\circ \left(1 - \tfrac{1}{4} e^2 - \tfrac{3}{64} e^4 - \tfrac{5}{256} e^6\right) \ldots\ldots\ldots (31)$$

degré moyen $= \tfrac{1}{90} \cdot Q = 1^\circ (1 - e^2)\left(1 + \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{45}{64} e^4 + \tfrac{175}{256} e^6\right) \ldots (32)$

L'expression générale d'un degré est

$$1^\circ (1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 L)^{-\frac{3}{2}}.$$

Egalant ces deux valeurs, on en tire

$$1 - e^2 \sin^2 L = \left(1 + \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{45}{64} e^4 + \tfrac{175}{256} e^6\right)^{-\frac{2}{3}};$$

d'où

$$e^2 \sin^2 L = \tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{5}{32} e^4 + \tfrac{5}{64} e^6$$

ou

$$\sin^2 L = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{32} e^2 + \tfrac{5}{64} e^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

On voit donc que la latitude du degré moyen surpasse de bien peu 45°; car $\sin^2 45° = \frac{1}{2}$

$$\sin^2 L - \sin^2 45° = \tfrac{1}{32} e^2 + \tfrac{1}{64} e^4 = \sin(L - 45°) \sin(L + 45°)$$

Soit $(L - 45°) = x$; donc

$$L = 45° + x, \quad L + 45° = 90° + x;$$

donc $\sin x \sin(90° + x)$, ou

$$\sin x \cos x = \tfrac{1}{2} \sin 2x = \tfrac{1}{32} e^2 + \tfrac{1}{64} e^4 = \tfrac{1}{32} e^2 \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2\right)$$

et $$\sin 2x = \tfrac{1}{16} e^2 \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Si dans la formule (24) on suppose $L = 0$, on aura pour la valeur du degré de latitude à l'équateur $(1 - e^2)$ arc de 1°........ (35)

Si l'on veut le degré égal à celui de la sphère circonscrite, la formule (24) deviendra

$$(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 L)^{-\frac{3}{2}} = 1,$$

d'où

$$\sin^2 L = \frac{1 - (1 - e^2)^{\frac{2}{3}}}{e^2} = \tfrac{2}{3}\left(1 + \tfrac{1}{6} e^2 + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{4}{9} e^4 + \&c.\right) \ldots (36)$$

d'où l'on voit que L diffère très-peu de l'arc, dont le sinus est $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Soit G cet arc, et $L - G = y$, on aura

$$\sin y = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} e^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} e^4 + \&c.}{\sin(2G + y)} = \frac{\frac{1}{9} e^2 + \frac{4}{9 \cdot 9} e^4}{\sin(109°28'16'' + y)} \ldots\ldots (37)$$

Le degré de la sphère inscrite sera $(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$ arc de 1°; d'où

$$(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}$$

et $$\sin^2 L = \frac{1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{3}}}{e^2} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{6} e^2 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{6} \cdot \tfrac{5}{9} e^4 \ldots (38)$$

Soit G′ l'arc dont le sinus $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, et $y' = L - G'$

$$\sin y' = \frac{\frac{1}{9} e^2 + \frac{1}{9 \cdot 9} e^4}{\sin(70°31'44'' + y')} \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

On remarquera que $G' = 90° - G$.

D'après ces notions générales, passons à la solution des problêmes qui se présentent dans la mesure d'un arc du méridien.

Calcul d'un Arc du Méridien dans le sphéroïde elliptique.

Soit PC (*fig.* 23) le demi-petit axe de la terre, PA et PB deux méridiens elliptiques, AB un aro terrestre dont on connoît la corde par la mesure des triangles, AM la normale au point A.

On connoît par observation

$$PMA = 90° - \text{latitnde de } A = 90° - L.$$

On connoît encore par observation l'angle PAB, ou l'azimuth du point B sur l'horizon de A.

Il faut en conclnre l'azimnth dn point A snr l'horizon de B, la latitude du point B, la différence de longitude entre A et B, et enfin la différence des parallèles en toises, ou l'arc du méridien compris entre les parallèles de A et de B.

Menez BO normale au point B, joignez BM, et du point M comme centre avec un rayon arbitraire, MB par exemple, décrivez les trois arcs ba, ap, bp; ces trois arcs formeront un triangle sphérique, dans lequel vous connoîtrez $ap = 90° - L$ et $pab = 180° - BAN = 180° - z$.

Supposons que l'on puisse exprimer ab en fonction de la corde mesurée AB (nous en donnerons bientôt le moyen), et nous aurons tout ce qui est nécessaire pour résoudre le triangle pab. Nous calcnlerons apb = différence de longitnde.

$pb = PMB = POB - OBM = 90° - L' - OBM = 90° - L' - x = 90° - (L' + x)$.

Nous calculerons aussi pba, angle des plans PBM et ABM, lequel diffèrera très-pen de l'angle des plans PBO et ABO, c'est-à-dire de l'azimuth cherché. Ainsi nous aurons $pba = B - y$, B étant l'azimuth cherché, et y une petite correction, dont nous chercherons la valeur avec celle de x.

Nous connoissons AM et BO, du moins en supposant l'applatissement connu. Cherchons BM, et alors dans le triangle rectiligne ABM, nous aurons les trois côtés, et par conséquent aussi les trois angles, et l'arc ab qui mesure AMB.

Jusqu'ici cette méthode est à très-peu près celle que le cit. Legendre a donnée dans les Mémoires de l'Académie, pour 1787; j'aurois même profité du travail de ce savant géomètre, sans y rien changer, si, en supprimant les démonstrations, il ne m'avoit mis dans la nécessité d'examiner moi-même pour me garantir des fautes d'impression, et si la manière dont j'avois fait mes premiers calculs n'eût exigé des formules plus adaptées à ce qui précède.

Nous avons trouvé ci-dessus $AM = (1 - e^2 \sin^2 L)^{-\frac{1}{2}}$; d'où

$$AM = 1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{9}{64}e^4 - (\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4)\cos 2L + \tfrac{3}{64}e^4 \cos 4L,$$

de même

$$BO = 1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{9}{64}e^4 - (\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4)\cos 2L' + \tfrac{3}{64}e^4 \cos 4L'$$

Ainsi

$$AM - BO = (\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4)(\cos 2L' - \cos 2L) + \tfrac{3}{64}e^4(\cos 4L' - \cos 4L)$$

$$= (\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{3}{16}e^4)\, 2\sin(L-L')\sin(L+L') + \tfrac{3}{64}e^4\, 2\sin 2(L-L')\cos 2(L+L')$$

$$= (\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)\sin(L-L')\sin(L+L') + \tfrac{3}{32}e^4 \sin 2(L-L')\cos 2(L+L')$$

et

$$BO = AM - (\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)\sin(L-L')\sin(L+L') - \tfrac{3}{32}e^4 \sin 2(L-L')\cos 2(L+L')$$

$$BM : BO :: \sin BOM : \sin BMO :: \sin POB : \sin PMB$$

$$:: \sin(90° - L') : \sin(90° - L' - x) :: \cos L' : \cos(L' + x);$$

donc

$$BM = \frac{BO \cos L'}{\cos(L'+x)} = \frac{BO \cos L'}{\cos L' \cos x - \sin L' \sin x} = \frac{BO}{\cos x - \operatorname{tg} L' \sin x}$$

$$= \frac{BO}{1 - \operatorname{tang} L \sin x - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}x} = BO + BO \sin x \operatorname{tang} L'$$

$$+ BO \sin^2 x \times (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 L')$$

x est un angle si petit, que les quantités négligées sont insensibles.

$$\sin x = \sin OBM = \frac{MO \sin MOB}{BM} = \frac{(MC - OC)\cos L'}{BM}.$$

$$\text{Or}(11)\ MC = e^2\sin L\,(1 - e^2\sin^2 L)^{-\frac{1}{2}} = e^2\sin L + \tfrac{1}{2}e^4\sin^3 L$$

$$OC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ e^2\sin L' + \tfrac{1}{2}e^4\sin^3 L'$$

$$MC - OC = e^2(\sin L - \sin L') + \tfrac{1}{2}e^4(\sin^3 L - \sin^3 L')$$

$$= 2e^2\sin\tfrac{1}{2}(L-L')\cos\tfrac{1}{2}(L+L') + \tfrac{1}{2}e^4(\tfrac{3}{4}\sin L - \tfrac{3}{4}\sin L' - \tfrac{1}{4}\sin 3L + \tfrac{1}{4}\sin 3L')$$

$$= 2e^2\sin\tfrac{1}{2}(L-L')\cos\tfrac{1}{2}(L+L') + \tfrac{3}{4}e^4\sin\tfrac{1}{2}(L-L')\cos\tfrac{1}{2}(L+L')$$
$$- \tfrac{1}{4}e^4\sin\tfrac{3}{2}(L-L')\cos\tfrac{3}{2}(L+L')$$

$$= (2e^2 + \tfrac{3}{4}e^4)\sin\tfrac{1}{2}dL\cos(L - \tfrac{1}{2}dL) - \tfrac{1}{4}e^4\sin\tfrac{3}{2}dL\cos 3(L - \tfrac{1}{2}dL)$$

$$= (2e^2 + \tfrac{3}{4}e^4)\sin\tfrac{1}{2}dL\cos L\cos\tfrac{1}{2}dL + (2e^2 + \tfrac{3}{4}e^4)\sin^2\tfrac{1}{2}dL\sin L$$
$$- \tfrac{1}{4}e^4\sin\tfrac{3}{2}dL\cos 3L\cos\tfrac{1}{2}dL - \tfrac{1}{4}e^4\sin\tfrac{3}{2}dL\sin\tfrac{3}{2}dL\sin 3L$$

$$= \tfrac{1}{2}(2e^2 + \tfrac{3}{4}e^4)\sin dL\cos L + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 dL\sin L - \tfrac{3}{8}e^4\sin dL\cos 3L$$

$$= (e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)\sin dL\cos L + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 dL\sin L$$

en rejetant les quantités du cinquième ordre.

$$(MC - OC)\cos L' = (e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)\sin dL\cos L\cos L' + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 dL\sin L\cos L'$$

$$= (e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)\sin dL\cos^2 L + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin L\cos L,$$

$$\text{et}\sin x = \frac{[(e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)\sin dL\cos^2 L + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin L\cos L](1 - \operatorname{tg}L'\sin x - \tfrac{1}{2}\sin^2 x)}{BO}$$

$$= \frac{e^2\sin dL\cos^2 L + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin L\cos L}{(1 - e^2\sin^2 L')^{\frac{1}{2}}}$$

$$= (e^2\sin dL\cos^2 L + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin L\cos L)(1 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 L')$$

$$\sin x = e^2\sin dL\cos^2 L + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin L\cos L$$

En négligeant toujours les quantités du cinquième ordre, nous pourrons même faire

$$x = e^2\, dL\cos^2 L + \tfrac{3}{2}e^2\, dL\sin dL\cos L\sin L \ldots\ldots (40)$$

En portant la valeur de $\sin x$ dans celle de B M, nous aurons

$$BM = BO + BO(e^2\sin^2 dL\cos^2 L + \tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin L\cos L)\operatorname{tang}L'$$

$$= BO + BO.e^2\sin dL\cos^2 L\operatorname{tang}L' + BO.\tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin^2 L$$

$$= BO + BO.\frac{e^2\sin dL\cos^2 L(\operatorname{tg}L - \operatorname{tg}dL)}{1 + \operatorname{tang}L\operatorname{tang}dL} + BO.\tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin^2 L$$

$$= BO + BO.\frac{e^2\sin dL\sin L\cos L - e^2\sin dL\operatorname{tg}dL\cos^2 L}{1 + \operatorname{tang}L\operatorname{tang}dL} + BO.\tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin^2 L$$

$$= BO + BO.e^2\sin dL\sin L\cos L - BO\,e^2\sin dL\operatorname{tang}dL\sin^2 L$$
$$- BO\,e^2\sin dL\operatorname{tang}dL\cos^2 L + BO.\tfrac{3}{2}e^2\sin^2 dL\sin^2 L$$

$$= BO + BO.e^2\sin dL\sin L\cos L + \tfrac{1}{2}BO.e^2\sin^2 dL\sin^2 L - BO\,e^2\sin^2 dL\cos^2 L$$

$$= BO + BO.e^2\sin dL\sin L\cos L + BO.e^2\sin^2 dL(\tfrac{1}{2}\sin^2 L - \cos^2 L) \quad (41)$$

On aura donc

$$AM - BM = AM - BO\,(1 + e^2 \sin dL \sin L \cos L + \&c.)$$

$$(AM - BM)^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BO}^2 . (1 + e^2 \sin dL \sin L \cos L)^2 - 2 AM . BO (1 + e^2 \sin dL \sin L \cos L)$$

$$= \frac{1}{1 - e^2 \sin^2 L} + \frac{(1 + e^2 \sin dL \sin L \cos L)^2}{1 - e^2 \sin^2 L'} - \frac{2(1 + e^2 \sin dL \sin L \cos L)}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2 \sin^2 L')^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 + e^2 \sin^2 L + e^4 \sin^4 L$$
$$+ (1 + e^2 \sin^2 L' + e^4 \sin^4 L')\,(1 + 2 e^2 \sin dL \sin L \cos L)$$
$$- 2\,(1 + e^2 \sin dL \sin L \cos L)\,\left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} e^4 \sin^4 L\right)$$
$$\times \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L' + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} e^4 \sin^4 L'\right)$$
$$= 2 + e^2 (\sin^2 L + \sin^2 L') + e^4 (\sin^4 L + \sin^4 L') + 2 e^2 \sin dL \sin L \cos L$$
$$- 2\left(1 + e^2 \sin dL \sin L \cos L + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} e^4 \sin^4 L + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L' + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} e^4 \sin^4 L' + \tfrac{1}{4} e^4 \sin^2 L \sin^2 L'\right)$$
$$= \tfrac{1}{4} e^4 (\sin^4 L + \sin^4 L') - \tfrac{1}{2} e^4 \sin^2 L \sin^2 L'$$

= zéro, en négligeant les quantités du cinquième ordre.

A présent

$$\frac{1}{AM . BM} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2 \sin^2 L')^{\frac{1}{2}}}{1 + e^2 \sin dL \sin L \cos L + e^2 \sin^2 dL \left(\tfrac{1}{2} \sin^2 L - \cos^2 L\right)}$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L' - \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{4} e^4 \sin^4 L\right) \left(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L' - \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{4} e^4 \sin^4 L'\right)$$
$$\times \left[1 - e^2 \sin dL \sin L \cos L - e^2 \sin^2 dL \left(\tfrac{1}{2} \sin^2 L - \cos^2 L\right)\right]$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} e^2 (\sin^2 L + \sin^2 L') - \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{4} e^4 (\sin^4 L + \sin^4 L') + \tfrac{1}{4} e^4 \sin^2 L \sin^2 L'$$
$$- e^2 \sin dL \sin L \cos L - e^2 \sin^2 dL \left(\tfrac{1}{2} \sin^2 L - \cos^2 L\right)$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} e^2 (\sin^2 L + \sin^2 L - \sin 2dL \sin L \cos L + \sin^2 dL \cos 2L) - \tfrac{1}{8} e^4 (\sin^4 L + \sin^4 L)$$
$$- e^2 \sin dL \sin L \cos L - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 dL \left(\tfrac{1}{2} \sin^2 L - \cos^2 L\right) - \tfrac{1}{4} e^4 (\sin^4 L)$$
$$= 1 - e^2 \sin^2 L - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 dL \cos 2L - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 dL \left(\tfrac{3}{2} \sin^2 L - 1\right)$$
$$= 1 - e^2 \sin^2 L - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 dL \left(1 - 2 \sin^2 L + \tfrac{3}{2} \sin^2 L - 1\right)$$
$$= 1 - e^2 \sin^2 L - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 dL \left(- \tfrac{1}{2} \sin^2 L\right)$$
$$= 1 - e^2 \sin^2 L + \tfrac{1}{4} e^2 \sin^2 dL \sin^2 L$$
$$= 1 - e^2 \sin^2 L \left(1 - \tfrac{1}{4} \sin^2 dL\right)$$
$$= 1 - e^2 \sin^2 L \left(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} dL\right) = 1 - e^2 \sin^2 L \cos^2 \tfrac{1}{2} dL.$$

Or le triangle rectiligne AMB donne

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} AMB = \frac{\tfrac{1}{4} \overline{AB}^2 - \tfrac{1}{4} (AM - BM)^2}{AM . BM} = \frac{\tfrac{1}{4} (AB)^2}{AM . BM}$$
$$= \frac{\tfrac{1}{4} (AB)^2}{1 - e^2 \sin^2 L \cos^2 \tfrac{1}{2} dL}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} AMB = \tfrac{1}{2} AB \left(1 - e^2 \sin^2 L \cos^2 \tfrac{1}{2} dL\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2} AB \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L \cos^2 \tfrac{1}{2} dL + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} e^4 \sin^4 L \cos^4 \tfrac{1}{2} dL\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} AB \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L \cos^2 \tfrac{1}{2} dL\right),$$

et

et même $\sin \frac{1}{2} AMB = \frac{1}{2} AB (1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2 L)$, en rejetant les termes du cinquième ordre, ou

$$\delta = AMB = AB (1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2 L) + \frac{1}{24} (AB)^3 \ldots\ldots (42)$$

ce qui ne diffère pas sensiblement de la formule du cit. Legendre, qui fait $AMB = \frac{AB}{AM}$.

Nous voilà donc en état d'exprimer l'arc $ab = AMB$ en fonction de la corde AB, connue par nos triangles ; nous pouvons donc résoudre le triangle sphérique pab, qui nous donnera la latitude approchée $(L' + x)$ du point B.

x est connu par la formule (40) ; nous aurons donc

$$L' = (L' + x) - x.$$

Il nous reste maintenant à déterminer la correction (y) d'azimuth. La question se réduit à ceci.

Le plan bR (*fig.* 24) fait avec le plan bMp un angle donné n. FIG. 24.
Dans le plan bMp on tire une ligne bO, qui forme un angle connu ObM, et par bO on mène un plan abO, on demande la différence entre l'angle n et l'angle formé par les plans abO et bMp.

Du rayon ab décrivez, 1°. l'arc an dans le plan bR; 2°. l'arc nm dans le plan bp; 3°. l'arc am dans le plan abO. Ces trois arcs formeront un triangle sphérique.

L'arc an est connu, ainsi que l'arc nm et l'angle compris n. Or

$$\text{tang } amn = \frac{\sin n}{\sin mn \cot na - \cos mn \cos n};$$

donc

$$\text{tang } (180 - amn) = \frac{\sin n}{\cos mn \cos n - \sin mn \cot na}$$

ou

$$\text{tang } B = \frac{\sin (B - y)}{\cos x \cos (B - y) - \sin x \text{ tang } \frac{1}{2} \delta};$$

car il est aisé de voir que $180° - amn$ est l'azimuth cherché, n l'azimuth approché, mn la correction x de latitude,

et na l'angle que la corde ab fait avec le rayon de la sphère qui nous a servi à calculer $(B-y)$

$$\tang (B-y) = \tang B \cos x - \frac{\tang B \sin x \tang \frac{1}{2} \delta}{\cos (B-y)}$$

$$\tang B - \tang (B-y) = \tang B (1-\cos x) + \frac{\tang B \sin x \tang \frac{1}{2} \delta}{\cos (B-y)}$$

$$\sin y = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \sin B \cos (B-y) + \sin B \sin x \tang \tfrac{1}{2} \delta.$$

y est donc d'un ordre inférieur à x, qui est déjà si petit ; donc sans erreur sensible

$$\begin{aligned} \sin y &= 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \sin B \cos B + \sin x \sin B \tang \tfrac{1}{2} \delta \\ &= \sin x \tang \tfrac{1}{2} \delta \sin B + \sin^2 \tfrac{1}{2} x \sin 2B \\ &= \sin x \tang \tfrac{1}{2} \delta \sin B + \tfrac{1}{4} \sin^2 x \sin 2B \\ &= e^2 \sin dL \cos^2 L \tang \tfrac{1}{2} \delta \sin B + \tfrac{1}{4} e^4 \sin^2 dL \cos^4 L \sin 2B \end{aligned}$$

$$y = e^2 dL \cos^2 L \tang \tfrac{1}{2} \delta \sin z - \tfrac{1}{4} e^4 dL \sin dL \cos^4 L \sin 2z.$$

z est l'azimuth compté du point sud, ou $z = (180° - B)$

$$y = \tfrac{1}{2} e^2 \delta \tang \delta \sin z \cos z \cos^2 L + \tfrac{1}{4} e^4 \delta^2 \sin 1'' \cos^4 L \sin 2z \cos^2 z$$

$$x = \tfrac{1}{4} e^2 \delta \tang \delta \sin 2z \cos^2 L + \tfrac{1}{4} e^4 \delta^2 \sin 1'' \cos^4 L \sin 2z \cos^2 z.$$

Le premier terme équivant à la formule du cit. Legendre.

y se peut toujours négliger.

La formule (42) suppose AB exprimé en parties de l'unité, qui est le rayon de l'équateur. Pour avoir δ en secondes, il faut diviser le second membre par R sin 1″, R étant le rayon de l'équateur en toises. Si dans la formule (24) on suppose dA connu en toises, elle donnera R. Ainsi tous les arcs du méridien mesurés jusqu'ici donnent autant de moyens de connoître R. Il faut seulement supposer l'applatissement connu. Pour mes calculs provisoires, j'ai employé à la détermination de R tous les degrés mesurés en France, et j'ai fait le calcul dans les trois hypothèses d'applatissement les plus ordinaires. Dans l'hypothèse de $\frac{1}{230}$, j'ai trouvé R = 3274887 par un milieu entre onze arcs différens. Dans celle de $\frac{1}{300}$, R = 3273553 ; enfin dans celle de $\frac{1}{310}$, R = 3273279.

Je vais rassembler ici toutes les formules que je viens de

démontrer, et qui ont servi au calcul de la méridienne dans le sphéroïde elliptique.

Soit R le rayon de l'équateur en toises;

e l'excentricité de l'ellipse, en supposant le demi-grand axe $=1$;

K la corde d'un arc terrestre, c'est-à dire un côté de triangle;

L la latitude connue d'une extrémité de K;

L' la latitude cherchée de l'autre extrémité;

M la longitude connue
M' la longitude cherchée } comptées du sud à l'ouest de 0° à 360°;

z l'azimuth connu
z' l'azimuth cherché } comptés de même.

Faites

$$\delta = \frac{K}{R \sin 1''}\left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L\right)$$

$$L' = L - \left(\delta \cos z + \tfrac{1}{2} \delta \sin \delta \sin^2 z \tang L\right)\left(1 + e^2 \cos^2 L\right)$$

$$z' = 180^\circ + z - \delta \sin z \tang L' - \tfrac{1}{4} \delta \sin \delta \sin 2z$$

$$M' = M + \frac{\delta \sin z}{\cos L'}$$

arc du parallèle, ou M' en toises $= \dfrac{R \sin M' \cos L'}{(1 - e^2 \sin^2 L')^{\frac{1}{2}}}$

$dP =$ différence des parallèles en toises $= \left(K \cos \tfrac{1}{2} \delta \cos z\right)$

$$+ \left(K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z\right)\left(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\delta \sin z \,\mathrm{tg}\, z \,\mathrm{tg}\, L\right) - 2\left(K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z\right) \sin \tfrac{1}{2}\delta \,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\delta \sin^2 z \,\mathrm{tg}^2 L$$

$$+ \frac{(\text{somme des trois premiers termes})^3 \left(1 - e^2 \sin^2 L\right)}{6 R^2}$$

$$- \left(K \cos \tfrac{1}{2}\delta \cos z\right) \tang z \, dz \sin 1''.$$

Pour abréger le calcul, j'ai construit plusieurs tables. La première me donnoit $\log\left(\dfrac{1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L}{R \sin 1''}\right)$, qu'il suffisoit d'ajouter à log. K pour avoir log. δ; la deuxième et la troisième donnoient le petit terme $\frac{1}{2}\, \delta \sin \delta \sin^2 z \tang L$; la quatrième, la correction d'applatissement pour L; la cinquième, le dernier terme de la valeur de z'; enfin la dernière servoit à trouver l'avant-dernier terme de la différence des parallèles en toises.

J'ai appliqué successivement toutes ces formules à tous les

signaux de Dunkerque à Montjouy : tous les L′, z′, M′ et dP étoient déterminés par deux calculs, et d'après deux signaux différens; en sorte qu'à chaque pas on avoit une vérification, d'après laquelle on pouvoit continuer avec sécurité. On pouvoit ainsi comparer entr'eux les azimuths observés à Watten, Bourges, Carcassonne et Montjouy; comparaison qui n'est guère moins importante que celle des deux bases.

Les latitudes observées à Paris, Evaux et Carcassonne, sans parler de celles de Dunkerque et Montjouy, fournissent encore des vérifications du plus grand intérêt. On voit en effet que si l'on ne fait pas pour l'applatissement une supposition exacte, on ne connoîtra bien ni e, ni R, ni δ, ni L′, ni z'. On verra donc, par le plus ou moins d'accord des L′ calculés avec les latitudes observées, si l'on a bien supposé. Il est à remarquer que l'incertitude ne s'étend pas sur les dP, ou l'arc du méridien. En effet, le seul terme important de la valeur de dP est le premier : or il ne renferme que le cosinus de $\frac{1}{2}\delta$; pour tous les autres termes, on n'a besoin, vu leur petitesse, que de connoître à-peu-près δ, z et L. z ne peut influer que sur le premier terme; mais si, par l'erreur de z, un dP est trop foible, le suivant sera trop fort; en sorte qu'il s'établit une compensation nécessaire, et presque entière. Soient en effet z, z', z'', z''', &c. les azimuths qui servent à calculer les dP successifs; on a

$$z' = 180° + z;\quad z'' = 180° + z',\quad z''' = 180° + z'' \text{ \&c.}$$

Ainsi les cosinus de z ont successivement les signes + et —.

J'aurois pu, dans les expressions de z' et de M′, éliminer L′, et n'employer que L; mais les formules seroient devenues moins simples, et même moins exactes.

L'avantage de toutes ces formules, est de n'exiger aucune figure, aucune attention, si ce n'est celle qu'on doit aux signes algébriques des sinus et tangentes. Cette seule règle conduit le calculateur d'une manière aussi sûre que facile et commode.

La formule par laquelle je détermine la différence des parallèles en toises, a pourtant un inconvénient que je ne prétends point dissimuler, et le voici. Elle suppose qu'on ait calculé d'avance

les latitudes de tous les signaux, et leurs azimuths sur l'horizon l'un de l'autre. Ces calculs sont assez longs; mais ils ne sont pas sans intérêt. D'abord, pour les latitudes et les longitudes, elles sont un des résultats les plus intéressans de l'opération, et il ne seroit pas permis de les omettre pour les clochers ou signaux placés dans quelque ville ou sur quelque montagne célèbre. Quant aux azimuths, sans être tout-à-fait aussi importans, ils ne paroîtront pas non plus absolument inutiles, et les auteurs de la *Méridienne vérifiée* les ont rapportés dans leur ouvrage, quoique leur méthode de calcul ne pût leur donner ces angles qu'à plusieurs minutes près. Je ne me serois donc pas dispensé de ce travail, quand même il n'auroit pas été nécessaire dans ma méthode pour déterminer l'arc du méridien. Ainsi cette objection me paroît légère.

La méthode que le cit. Legendre a donnée dans les Mémoires de 1787, et qu'il vient tout nouvellement de recommander encore aux géomètres, a l'avantage de n'exiger que la connoissance des côtés et des angles des triangles avec un seul azimuth. Cet avantage est précieux; mais il est acheté par des inconvéniens assez graves.

Premièrement, les vérifications sont rares et difficiles, surtout dans les endroits où elles sont nécessaires; de sorte qu'une faute commise au commencement du calcul, et dont on ne se seroit pas apperçu faute de moyens de vérification, affecteroit toute la suite de l'opération. Eh! qui peut s'assurer de ne pas se tromper dans le calcul de plus de cent triangles, tous enchaînés les uns aux autres?

Je suppose qu'on ait calculé la partie AM de la méridienne, *voyez* ci-dessus, pag. 3 du Mémoire du cit. Legendre, on pourra la vérifier en la décomposant, et en calculant d'abord la partie comprise dans le triangle ABC, et ensuite celle qui est comprise dans le triangle BCM. Mais quand on aura calculé la partie MO, la vérification sera-t-elle bien commode? Ne peut-il pas arriver que le triangle MFO soit très-obtus en F, et très-aigu en M, qu'une très-petite base opposée à un angle

très-aign serve à conclure un côté considérablement plns grand ? Dans ce cas, pourra-t-on espérer quelque précision ? Qu'on ait, par exemple, un angle de 9°; un dixième de seconde donnera 133 parties de variation dans le log. sinus. Il faudra donc tont calculer en centièmes de secondes : alors la méthode ne perdra-t-elle pas beaucoup de sa simplicité et de sa brièveté ? Autre inconvénient; après avoir calculé les lignes CM et CD, et trouvé leurs logarithmes, il faut passer aux nombres pour conclure la différence DM, et chercher le logarithme de DM. On ne peut répondre de $\overset{t}{0}$,001, ni sur CD ni sur CM : ainsi DM pourroit être en erreur de $\overset{t}{0}$,002.

Je ne nierai pas qu'avec un peu d'adresse, et en imaginant de nouvelles constructions à chaque cas embarrassant qui se présente, on ne puisse atténuer beauconp les errenrs; mais cette recherche même est pénible.

Dans ma méthode, au contraire, on n'emploie qne les logarithmes des côtés; on n'a aucun besoin des nombres : presque jamais je n'emploie que des sinns d'angles au-dessus de 60°, et ils varient peu. Je n'ai qu'un nombre à chercher, qui demande quelque soin, c'est celui du terme $K \cos \frac{1}{2} \delta \cos z$; et qnand je m'y tromperois de qnelqnes millièmes de toises, l'erreur se borneroit à ce terme, et n'auroit aucune influence sur les calculs suivans.

Voilà les raisons qui m'ont engagé à chercher des méthodes nouvelles. J'en avois trouvé plusieurs; je n'ai donné ci-dessus que celle qui m'a paru la plus simple. J'en avois employé deux dans tous les calculs entre Dunkerque et Orléans; mais les trouvant par-tout d'accord, je m'en suis tenu à la plus facile, d'autant plus qu'elle portoit avec elle sa vérification; et voici en quoi elle consiste. La différence des parallèles de A et D se
FIG. p. 3. compose des distances entre A et B, B et D d'un côté; mais on peut la trouver égalemcnt en prenant la somme des distances entre les parallèles de A et C, C et D; on peut aller directement de D en F, on de D en E, et puis de E en F; et c'est ainsi que j'en ai usé par-tout.

Au reste, malgré les objections auxquelles la méthode que je viens d'examiner me paroît sujette en quelques circonstances, je n'ai pas laissé de l'employer aussi pour confirmer les résultats de mes autres calculs. De Dunkerque à Orléans, sur un arc de 179,000$^{t.}$ environ, la différence étoit à peine de 0$^{t.}$,1, quoique je n'eusse calculé qu'en dixièmes de secondes. Il est vrai que jusques-là je n'avois rencontré aucun de ces cas embarrassans; mais ils se sont accumulés entre Orléans et Bourges; et alors sur un arc de 225,515$^{t.}$, la différence étoit de 0$^{t.}$,55, c'est-à-dire de $\frac{1}{450,000}$; ce qui est, au reste, assez peu important.

On a reproché à ma méthode la longueur du calcul que nécessite la réduction des angles sphériques aux angles des cordes; on a en effet trois calculs à faire pour chaque triangle. Dans l'autre méthode, on n'en a que deux; mais, dans la mienne, on est dispensé du soin de construire une figure, et cela fait au moins compensation; et l'on a en outre incomparablement moins de logarithmes à chercher péniblement dans les tables.

Dans ma méthode, il est beaucoup plus facile de déterminer et de corriger l'erreur produite sur la longueur de la méridienne, par une petite erreur sur l'azimuth primitif.

J'ai dit que la méthode anciennement employée pour comparer les azimuths observés aux deux extrémités d'une chaîne de triangles, étoit défectueuse. On supposoit tous les méridiens parallèles, et on ne calculoit la convergence que pour la dernière station. Aussi trouvoit-on des erreurs assez graves. Boscowich, dans son *Voyage astronomique*, pag. 147, trouvoit 88″ de différence entre l'azimuth observé à Rimini et l'azimuth calculé d'après celui de Rome, c'est-à-dire à l'autre extrémité d'un arc de 2° 10′. En recommençant le calcul par ma méthode, j'ai réduit l'erreur à 24″. A la page 323 du même ouvrage, Boscowich se donne beaucoup de peine pour expliquer par les observations l'erreur qui ne vient que du calcul. En vérifiant de même les

azimuths de la *Méridienne vérifiée* depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan, j'ai considérablement diminué les erreurs qu'on avoit trouvées en 1740, et il ne restoit plus guère que celles qu'on peut raisonnablement attribuer aux observations.

L'opération faite en 1787 pour la jonction des Observatoires de Paris et de Greenwich, est la première, que je sache, dans laquelle on ait fait attention à l'excès sphérique des trois angles sur 180°. Auparavant, cet excès restoit confondu avec les erreurs des observations; et quand on répartissoit les erreurs également sur les trois angles, on se conformoit d'avance, et sans le savoir, au théorème du cit. Legendre. On sentoit bien que, dans des triangles dont les côtés ne sont que de quelques minutes, l'erreur ne pouvoit être bien considérable; mais personne n'avoit donné de formule pour évaluer cette erreur. C'est en tâchant de le faire que j'ai vérifié de la manière suivante le théorême curieux du cit. Legendre, que je n'avois pu me démontrer directement.

L'excès sphérique a pour expression

$$\tfrac{1}{2}\,AB.AC.\sin A = \tfrac{1}{2}\,BC.AC.\sin C = \tfrac{1}{2}\,BC.AB.\sin B.$$

En répartissant cet excès par égale portion sur les trois angles; on employoit, au lieu de A, l'angle $(A - \frac{1}{6}AB.AC.\sin A)$; au lieu de B, l'angle $(B - \frac{1}{6}BA.BC.\sin B)$. On faisoit donc

$$AC = \frac{BC\sin(B - \frac{1}{6}BA.BC.\sin B)}{\sin(A - \frac{1}{6}AB.AC\sin A)} = \frac{BC\sin B - BC\cos B.\frac{1}{6}BA.BC.\sin B}{\sin A - \cos A.\frac{1}{6}AB.AC.\sin A}$$

$$= \frac{\dfrac{BC\sin B}{\sin A} - \frac{1}{6}BC\cos B.BA.\left(\dfrac{BC\sin B}{\sin A}\right)}{1 - \frac{1}{6}AB.AC.\cos A}$$

$$= \frac{BC\sin B}{\sin A}(1 - \tfrac{1}{6}BA.BC.\cos B)(1 + \tfrac{1}{6}AB.AC.\cos A)$$

$$= \frac{BC\sin B}{\sin A}(1 - \tfrac{1}{6}AB.BC.\cos B + \tfrac{1}{6}AB.AC.\cos A)$$

$$= \frac{BC\sin B}{\sin A}[1 + \tfrac{1}{6}AB(AC\cos A - BC\cos B)].$$

Or, dans le triangle ABC, imaginez la perpendiculaire CD abaissée

abaissée sur le côté AD, $AC \cos A - BC \cos B$ sera la différence des segmens de la base AB, et cette différence $= \frac{(AC + BC)(AC - BC)}{AB}$; donc on faisoit

$$AC = \frac{BC \sin B}{\sin A}\left[1 + \tfrac{1}{6}(AC + BC)(AC - BC)\right]$$

$$= \frac{BC \sin B}{\sin A}\left[1 + \tfrac{1}{6}(\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)\right]$$

$$= \frac{BC \sin B}{\sin A} + \tfrac{1}{6} AC(\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)$$

$$= \frac{BC \sin B}{\sin A} + \tfrac{1}{6}\overline{AC}^3 - \tfrac{1}{6} AC.\overline{BC}^2$$

ou

$$AC - \tfrac{1}{6}\overline{AC}^3 = \frac{BC \sin B}{\sin A} - \tfrac{1}{6} AC.\overline{BC}^2$$

$$= \frac{BC \sin B}{\sin A} - \tfrac{1}{6}\frac{\overline{BC}^3 \sin B}{\sin A} = \frac{(BC - \tfrac{1}{6}\overline{BC}^3)\sin B}{\sin A},$$

c'est-à-dire $\sin AC = \frac{\sin BC \sin B}{\sin A}$, ou l'équation que donne le triangle sphérique.

Dans les transformations successives que nous avons fait subir à notre équation primitive, nous n'avons négligé que des termes, comme $\frac{1}{36}(AB.AC.\sin A)^2$, et d'autres pareils ou plus petits encore : ainsi le théorême a toute l'exactitude qu'on peut desirer dans la pratique.

On peut donc remarquer, d'après ce qu'on vient de lire, qu'on peut, dans la résolution des triangles, suivre en tout la méthode vulgaire, toutes les fois qu'il s'agit simplement de calculer la longueur des côtés. En effet, l'excès sphérique n'est plus alors qu'un objet de curiosité qui peut faire juger de l'exactitude des observations. Mais l'excès sphérique étant renfermé dans des limites assez étroites, on peut avoir une idée exacte de la précision obtenue, sans faire ce petit calcul. Dans notre

M

méridienne, par exemple, l'excès sphérique n'a jamais été au-dessous de 0",3 ni au-dessus de 4",1. Ainsi, en considérant la carte des triangles, on estimeroit à 1" près l'excès sphérique, et l'on sauroit par conséquent avec la même précision quelle est l'erreur des observations sur la somme des trois angles.

On pourroit donc se dispenser de connoître l'excès sphérique pour les triangles principaux, s'ils étoient les seuls qu'on eût à calculer. Mais il n'en est pas de même des triangles, dans lesquels les premiers sont décomposés par la méridienne qui les traverse. Dans ces triangles partiels, on connoît ordinairement un côté et deux angles; d'où l'on conclut le troisième en complétant les 180°. Aucun des angles ainsi formés n'est à sa valeur véritable. C'est alors que le théorême du cit. Legendre devient indispensable, si l'on veut calculer avec exactitude ces triangles partiels, et la partie de la méridienne renfermée dans chacun d'eux. Quand les triangles partiels ont très-peu de surface, l'excès sphérique est insensible; et c'est encore ce qu'on avoit pressenti dans l'ancienne méthode. Par exemple, dans la *Méridienne vérifiée*, on voit que, pour déterminer l'arc du méridien, on choisissoit de préférence les côtés les plus voisins de la méridienne, et ceux qui formoient avec elle des angles fort aigus. Dans ce cas, les triangles rectangles formés par les côtés des triangles primitifs et les perpendiculaires abaissées de chaque signal sur la méridienne, avoient fort peu de surface, et l'on pouvoit, sans erreur sensible, les traiter comme rectilignes, en négligeant même l'excès sphérique. Cependant, comme il étoit impossible dans la pratique que tous les côtés nécessaires eussent, par rapport au méridien, une position aussi favorable, il en résultoit des erreurs qu'on évite sûrement en employant la méthode du cit. Legendre, ou celle que j'ai donnée ci-dessus.

Il seroit très-embarrassant de déterminer ces erreurs *à priori*; pour les connoître par expérience, j'ai calculé l'arc entre Dunkerque et Barcelonne par ma formule et par l'ancienne méthode. L'erreur de celle-ci étoit de 8 mètres sur 1100000,

ou de $\frac{1}{137500}$; entre Dunkerque et Bourges, l'erreur étoit à-peu-près dans la même proportion avec la longueur de l'arc. J'avouerai que je m'attendois à des erreurs plus graves.

Hauteurs des Sommets des Triangles au-dessus du niveau de la Mer, et moyens pour déterminer la Réfraction terrestre.

Soit (*fig.* 25.) C le centre de la terre, A et B deux signaux, ZAB l'angle entre le zénith du signal A et le sommet du signal B, VBA l'angle entre le zénith du signal B et le sommet du signal A FIG. 25.

$$ZAB = 180° - BAC$$
$$VBA = 180° - ABC$$

$$ZAB + VBA = 360° - (BAC + ABC) = 360° - (180° - C) = 180° + C.$$

Ainsi la somme des deux distances au zénith, observées réciproquement aux deux signaux, devroit surpasser 180° d'une quantité égale à l'angle C, c'est-à-dire à l'arc de grand cercle mené d'un signal à l'autre sur la surface de la terre réputée sphérique.

Pour que cette équation fût vraie, il faudroit dans les deux observations placer le centre du cercle au sommet même du signal où l'on observe; et c'est ce qui n'a jamais lieu dans la pratique. Le cercle est toujours au-dessous des sommets A et B d'une quantité que j'ai nommée dH, et qui se trouve parmi les observations dans la préface de chacune des stations.

Le cercle étant donc placé en a, au lieu d'être en A, on a réellement observé ZaB, au lieu de ZAB. La distance observée est plus petite que celle qu'on auroit observée au sommet A; et pour la réduire au sommet, il faut y ajouter l'angle

$$ABa = ZAB - ZaB.$$

Or, suivant la formule donnée ci-dessus, page 32, le triangle AaB donne

$$ABa = \left(\frac{Aa}{aB}\right)\frac{\sin AaB}{\sin 1''} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{Aa}{aB}\right)^2 \frac{\sin 2\,AaB}{\sin 1''}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{Aa}{aB}\right)^3 \frac{\sin 3\,AaB}{\sin 1''} + \&c.$$

Soit $\Delta = AaB$ = dist. zén. observée, $Aa = dH$, $aB = D$, $ABa = d\Delta$,

$$d\Delta = \left(\frac{dH}{D}\right)\frac{\sin\Delta}{\sin 1''} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dH}{D}\right)^2\frac{\sin 2\Delta}{\sin 1''} + \&c.$$

Cette série est extrêmement convergente, à cause de la petitesse de la fraction $\left(\frac{dH}{D}\right)$, et l'on peut toujours s'en tenir au premier terme, d'autant plus que le second a pour facteur $\sin 2\Delta$, qui diffère très-peu de $\sin 180°$, lequel $= 0$.

On fera donc

$$d\Delta = \frac{dH \sin\Delta}{D \sin 1''}.$$

Cette formule suppose que l'on connoît $D = aB$, c'est-à-dire la distance rectiligne du cercle a au sommet du signal B; au lieu que le calcul des triangles donne la corde de l'angle C pour une sphère dont le rayon est la distance de l'horizon de la mer au centre de la terre; et cette corde est plus courte que la distance aB. Pour évaluer l'erreur, soit K la corde connue, et $D = K + x$; on a donc

$$d\Delta = \frac{dH\sin\Delta}{K+x} = \left(\frac{dH}{K}\right)\frac{\sin\Delta}{1+\frac{x}{K}} = \frac{dH\sin\Delta}{K}\left(1 - \frac{x}{K} + \frac{x^2}{K} - \&c.\right)$$

Soit R le rayon de la terre au niveau de la mer, $R + dR$ la ligne menée du centre de la terre au sommet du signal,

$$R + dR : R :: D : K;$$

d'où

$$D - K = \frac{K \,.\, dR}{R} = x.$$

Donc $\frac{x}{K} = \frac{dR}{R}$; donc

$$d\Delta = \frac{dH \sin \Delta}{K \sin 1''}\left(1 - \frac{dR}{R} + \left(\frac{dR}{R}\right)^2 - \&c.\right)$$

Dans le cas le plus défavorable que j'aie rencontré, le second terme ne passoit pas 0'',015; on peut donc le négliger.

Les distances au zénith, corrigées de cette manière, satisferoient à la règle ci-dessus, et l'on auroit

$$\Delta + d\Delta + \Delta' + d\Delta' = 180° + C.$$

Soit pour abréger $\delta = \Delta + d\Delta$ et $\delta' = \Delta' + d\Delta'$; on auroit donc

$$\delta + \delta' = 180° + C.$$

Mais la réfraction terrestre élève tous les objets. L'objet A se voit en A', et B en B'. Nous avons par l'observation corrigée, comme il vient d'être dit, $ZAB' = \delta$ et $VBA' = \delta'$. Soient r et r' les réfractions terrestres

$$ZAB = ZAB' + BAB' = \delta + r$$
$$VBA = VBA' + ABA' = \delta' + r';$$

donc

$$ZAB + VBA = \delta + r + \delta' + r' = 180° + C:$$

d'où

$$r + r' = 180° - (\delta + \delta') + C;$$

et si l'on suppose $r = r'$, comme on est encore obligé de le faire

$$r = 90° - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 180°).$$

Il existe un rapport à-peu-près constant entre r et C. Pour le trouver par les observations, on aura

$$\frac{r}{C} = \frac{\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 180°)}{C}$$

$$ZAB = \delta + r = \delta + 90° - \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{2}\delta' + \tfrac{1}{2}C = 90° + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')$$
$$VBA = \delta' + r' = \delta' + 90° - \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{2}\delta' + \tfrac{1}{2}C = 90° + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta').$$

Pour trouver la différence de niveau entre deux signaux, c'est-à-dire la différence des distances AC, BC, des signaux

FIG. 26. A et B au centre de la terre réputée sphérique, soit (*fig.* 26) $CB' = CA$; BB' sera la différence de niveau. Menons la corde AB'. Nous savons que $ZAB = \delta + r$, et $B'AC = 90° - \frac{1}{2}C$; donc

$$BAB' = 180° - ZAB - B'AC = 180° - \delta - r - 90° + \tfrac{1}{2}C = 90° + \tfrac{1}{2}C - (\delta + r)$$

$$ABB' = AB'C - BAB' = 90° - \tfrac{1}{2}C - 90° - \tfrac{1}{2}C + (\delta + r) = \delta + r - C.$$

Or le triangle BAB' donne

$$BB' = \frac{AB' \sin BAB'}{\sin ABB'} = \frac{K \sin(90° + \frac{1}{2}C - \delta - r)}{\sin(\delta + r - C)}$$

$$= \frac{K \sin(180° - 90° - \frac{1}{2}C + \delta + r)}{\sin(\delta + r - C)} = \frac{K \sin(90° - \frac{1}{2}C + \delta + r)}{\sin(\delta + r - C)}$$

$$= \frac{K \cos(\frac{1}{2}C - \delta - r)}{\sin(\delta + r - C)} = \frac{K \cos(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r - C)},$$

ou

$$dN = \frac{K \cos(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C)} = \frac{K \cos(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}C)\cos\frac{1}{2}C - \cos(\delta + r - \frac{1}{2}C)\sin\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{K \cot(\delta + r - \frac{1}{2}C) \sec\frac{1}{2}C}{1 - \tang\frac{1}{2}C \cot(\delta + r - \frac{1}{2}C)}$$

$$= \frac{K \cot(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C}\left[1 + \tang\tfrac{1}{2}C . \cot(\delta + r - \tfrac{1}{2}C) + \&c.\right]$$

Le premier terme suffira le plus souvent.

On aura une expression plus commode en éliminant r

$$ZAB = 90° + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')$$

$$BAC = 180° - ZAB = 90° - \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = 90° - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$

$$B'AC = 90° - \tfrac{1}{2}C$$

$$BAB' = BAC - B'AC = \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$

$$B'BA = 180° - VBA = 90° - \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta);$$

d'où

$$BB' = dN = \frac{K \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)} = \frac{K \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\left(\frac{\delta' - \delta}{2} + \frac{1}{2}C\right)}$$

$$= \frac{K \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta)\cos\frac{1}{2}C - \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta)\sin\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{K \tang\frac{1}{2}(\delta' - \delta) \sec\frac{1}{2}C}{1 - \tang\frac{1}{2}C \tang\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}$$

$$= \frac{K \tang\frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos\frac{1}{2}C}\left[1 + \tang\tfrac{1}{2}C \tang\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) + \&c.\right]$$

série dont le premier terme suffira le plus souvent, et dans laquelle on pourroit même supposer $\cos \frac{1}{2} C = 1$. De la formule exacte on tire

$$dN - dN \tang \tfrac{1}{2} C \tang \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta) = K \tang \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta) \sec \tfrac{1}{2} C$$

$$dN = K \sec \tfrac{1}{2} C \tang \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta) + dN \tang \tfrac{1}{2} C \tang \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta),$$

et enfin

$$\tang \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta) = \frac{dN}{K \sec \frac{1}{2} C + dN \tang \frac{1}{2} C} = \frac{dN \cos \frac{1}{2} C}{K + dN \sin \frac{1}{2} C} = \frac{\frac{dN}{K} \cos \frac{1}{2} C}{1 + \frac{dN}{K} \sin \frac{1}{2} C}.$$

Si nous comparons terme à terme cette équation à celle qui nous a donné ci-dessus la surface du triangle sphérique, c'est-à-dire à

$$\tang y = \frac{m \sin A}{1 + m \cos A};$$

nous en tirerons $y = \frac{1}{2} (\delta' - \delta)$, $m = \left(\frac{dN}{K}\right)$, $\cos \frac{1}{2} C = \sin A$ $\sin \frac{1}{2} C = \cos A$; d'où $A = 90^\circ - \frac{1}{2} C$. Or nous avons vu que la valeur de y pouvoit s'exprimer pour la série suivante

$$y = m \sin A - \tfrac{1}{2} m^2 \sin 2A + \tfrac{1}{3} m^3 \sin 3A - \&c.$$

donc

$$\tfrac{1}{2} (\delta' - \delta) = \left(\frac{dN}{K}\right) \sin (90^\circ - \tfrac{1}{2} C) - \tfrac{1}{2} \left(\frac{dN}{K}\right)^2 \sin (180^\circ - \tfrac{2}{2} C) + \tfrac{1}{3} \left(\frac{dN}{K}\right)^3 \sin (270^\circ - \tfrac{3}{2} C) - \&c.$$

$$= \left(\frac{dN}{K}\right) \cos \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} \left(\frac{dN}{K}\right)^2 \sin \tfrac{2}{2} C - \tfrac{1}{3} \left(\frac{dN}{K}\right)^3 \cos \tfrac{3}{2} C + \tfrac{1}{4} \left(\frac{dN}{K}\right)^4 \sin \tfrac{4}{2} C + \tfrac{1}{5} \left(\frac{dN}{K}\right)^5 \sin \tfrac{5}{2} C - \&c.$$

série dont le premier terme suffira presque toujours. Dans ce cas

$$\tfrac{1}{2} (\delta' - \delta) = \frac{dN . \cos \frac{1}{2} C}{K . \sin 1''} = \frac{dN \cos \frac{1}{2} C}{2R \sin \frac{1}{2} C \sin 1''} = \left(\frac{\frac{1}{2} dN}{R \sin 1''}\right) \cot \tfrac{1}{2} C,$$

ou bien en conservant le second terme, qui suffira toujours,

$$\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) = \left(\frac{\frac{1}{2}dN}{R\sin 1''}\right)\cot\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dN}{2R\sin\frac{1}{2}C}\right)^2 \frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin 1''}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}dN}{R}\right)\frac{\cot\frac{1}{2}C}{\sin 1''} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dN}{2R\sin\frac{1}{2}C}\right)^2 \frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\sin 1''}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}dN}{R}\right)\frac{\cot\frac{1}{2}C}{\sin 1''} - \left(\frac{\frac{1}{2}dN}{R}\right)^2 \frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\sin^2\frac{1}{2}C\sin 1''}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}dN}{R}\right)\frac{\cot\frac{1}{2}C}{\sin 1''} - \left(\frac{\frac{1}{2}dN}{R}\right)^2 \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\sin 1''}$$

$$= \left[\left(\frac{\frac{1}{2}dN}{R}\right) - \left(\frac{\frac{1}{2}dN}{R}\right)^2\right]\frac{\cot\frac{1}{2}C}{\sin 1''}.$$

Ainsi, connoissant dM et K ou $\frac{1}{2}$ C, on calculeroit $\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$; et si l'on observoit δ ou δ', on en concluroit

$$\delta' = \delta + \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta), \quad \text{ou} \quad \delta = \delta' - \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta);$$

mais il est plus facile d'observer δ et δ' que de mesurer dN.

On voit donc comment on pourra trouver l'élévation de tous les signaux par rapport à un même horizon, par exemple, celui de la mer. Ainsi, dans l'opération de la méridienne, on connoissoit la hauteur de la tour de Dunkerque au-dessus de la mer. Le calcul fait sur l'une des formules précédentes, donnoit l'élévation des deux signaux voisins au-dessus de la tour de Dunkerque. Connoissant ainsi l'élévation des tours de Cassel et de Watten au-dessus de celle de Dunkerque, on en avoit la hauteur au-dessus de la mer, en ajoutant à ces élévations celle de la tour de Dunkerque au-dessus du même niveau. Ainsi soit h la hauteur de la tour de Dunkerque au-dessus du niveau de la mer, dN et dN' les différences de niveau entre Dunkerque et Cassel, Dunkerque et Watten.

La hauteur de Cassel au-dessus de la mer étoit $h + dN$, et la hauteur de Watten $h + dN'$.

La hauteur du signal suivant, qui étoit celui de Fiefs, pouvoit se déterminer par Watten ou par Cassel; les deux calculs se vérifioient mutuellement, et s'il y avoit une différence, on pouvoit prendre le milieu.

C'est

C'est ainsi qu'en supposant la terre sphérique, on pourroit déterminer les différences de niveau pour les sommets d'une longue suite de triangles.

En retranchant de ces hauteurs la longueur du signal, on auroit l'élévation du sol au-dessus du niveau de la mer.

Remarquons que dans ces formules, δ est la distance observée au lieu dont on connoît l'élévation, et δ' la distance observée au lieu dont on cherche l'élévation. Si $\delta' > \delta$, dN est additif; si $\delta' < \delta$, dN est soustractif.

Il peut arriver qu'on n'ait point observé δ, mais seulement δ', et qu'on ait besoin de dN. Dans ce cas, il faut éliminer δ de la formule

$$dN = \frac{K\cot(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C}[1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}C.\cot(\delta + r - \tfrac{1}{2}C) + \&c.]$$

Or $\delta = 180° - \delta' + C - 2r$; donc

$$\delta + r - \tfrac{1}{2}C = 180° - \delta' + C - 2r + r - \tfrac{1}{2}C$$
$$= 180° - \delta' + \tfrac{1}{2}C - r;$$

donc

$$dN = \frac{K\cot(180° - \delta' + \frac{1}{2}C - r)}{\cos\frac{1}{2}C}[1 + \text{tg}\tfrac{1}{2}C\cot(180° - \delta' + \tfrac{1}{2}C - r) + \&c.]$$

$$= -\frac{K\cot(\delta' + r - \frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C}[1 - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\cot(\delta' + r - \tfrac{1}{2}C) + \&c.]$$

Mais $r = nC$, n étant un facteur constant dont nous allons bientôt nous occuper. Ainsi

$$dN = -\frac{K\cot[\delta' - (\frac{1}{2} - n)C]}{\cos\frac{1}{2}C}[1 - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\cot(\delta' - (\tfrac{1}{2} - n)\,C)]$$

C'est par cette formule qu'à l'aide des signaux de Melun, Lieusaint et Malvoisine, dont je connoissois les hauteurs au-dessus de la mer, j'ai déterminé l'élévation au-dessus de la mer, pour le point où la base de Melun faisoit un coude.

Si l'on connoît δ, alors en mettant nC pour r dans la formule, on a

$$dN = +\frac{K\cot[\delta - (\frac{1}{2} - n)C]}{\cos\frac{1}{2}C}[1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\cot(\delta - (\tfrac{1}{2} - n)\,C)].$$

N

Si l'on apperçoit l'horizon de la mer d'un lieu où l'on observe, on peut immédiatement en conclure la hauteur de ce lieu au-dessus de la mer ; il suffit de mesurer l'angle entre le zénith et l'horizon de la mer.

FIG. 26. Soit A l'horizon de la mer, et B le point dont on cherche la hauteur ; prenez $CB' = CA$, BB' sera la hauteur cherchée. L'angle A est droit ; ainsi

$$BB' = AC \sec C - AC = AC(\sec C - 1) = AC \operatorname{tg} C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = R \operatorname{tg} C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C;$$

mais

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - (180^\circ - VBA) = 90^\circ - 180^\circ + \delta = \delta - 90^\circ;$$

donc

$$BB' = R \operatorname{tang} (\delta - 90^\circ) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta - 90^\circ).$$

Cette équation seroit exacte sans la réfraction qui élève l'horizon de la mer, ainsi que tous les objets terrestres. Ainsi, au lieu de δ, il faut mettre dans la formule $\delta + r$, r étant la réfraction ; donc

$$BB' = R \operatorname{tang} (\delta + r - 90^\circ) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta + r - 90^\circ):$$

mais

$$r = nC = n(\operatorname{tang} C - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 C) = n[\operatorname{tg}(\delta - 90^\circ) - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 (\delta - 90^\circ)];$$

donc

$$BB' = R \operatorname{tang} \left[\delta - 90^\circ + \left(\frac{n}{\sin 1''}\right) \operatorname{tg}(\delta - 90^\circ) \right] \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \left[\delta - 90^\circ + \frac{n}{\sin 1''} \operatorname{tg}(\delta - 90^\circ) \right]$$

$$= R \operatorname{tang} [\delta - 90^\circ + n(\delta - 90^\circ)] \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} [\delta - 90^\circ + n(\delta - 90^\circ)]$$

$$= \tfrac{1}{2} R \operatorname{tang}^2 [\delta - 90^\circ + n(\delta - 90^\circ)]$$

$$= \tfrac{1}{2} R \operatorname{tang}^2 [(1 + n)(\delta - 90^\circ)]$$

$$\text{élévation au-dessus de la mer} = \tfrac{1}{2} (1 + n)^2 R \operatorname{tang}^2 (\delta - 90^\circ).$$

A présent

$$n = \frac{r}{C} = \frac{\tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} (\delta + \delta' - 180^\circ)}{C}.$$

On voit donc que, pour déterminer n, il suffit d'avoir observé les distances au zénith réciproques δ et δ' de deux lieux dont la distance soit connue, et que j'ai pu avoir autant de déterminations de n qu'il y a de côtés dans la suite de mes triangles, depuis Dunkerque jusqu'à Rodez.

n varie suivant l'état de l'atmosphère. Mon dessein n'est point d'entrer ici dans le détail de mes observations, et je me contenterai de dire qu'en été n m'a paru d'environ 0,075; en automne et au printemps, de 0,08; en hiver, de 0,09 à 0,10. On peut supposer 0,08 le plus souvent.

Différence de Niveau sur le Sphéroïde.

Si la terre étoit sphérique, deux objets seroient de niveau s'ils étoient dans une même surface sphérique qui auroit pour centre le centre même de la terre, quel que fût d'ailleurs le rayon de cette surface.

Si la terre est un ellipsoïde, deux objets seront de niveau quand ils seront à la surface de l'ellipsoïde aqueux, ou à la surface d'un ellipsoïde semblable et concentrique au premier, et d'un rayon quelconque.

Dans la *fig.* 23, la distance de B au zénith de A est $180°-MAB$; FIG. 23.
mais la distance de A au zénith de B est
$180°-OBA=180°-(MBA-MBO)=180°-(MBA-u)$.
OBA a pour mesure l'arc am, *fig.* 24. Or FIG. 24.

$$\cos am=\cos n\sin an\sin mn+\cos an\cos mn;$$

donc $\cos OBA$ ou $\cos(MBA-u)$ ou

$$\cos MBA\cos u+\sin MBA\sin u=\cos B\sin MBA\sin x+\cos MBA\cos x;$$

d'où

$$\sin u=\frac{-\sin x\sin MBA\cos z+\cos MBA\cos x-\cos MBA\cos u}{\sin MBA}$$
$$=-\sin x\cos z+\cot MBA(\cos x-\cos u),$$

ou sans erreur sensible

$$u=-\sin x\cos z=-e^2 dL\cos^2 L\cos z=+e^2 AMB\cos^2 L\cos^2 z$$
$$=+e^2 M\cos^2 L\cos^2 z.$$

Soient

$$\delta=180°-MAB,\quad \delta'=180°-OBA,$$
$$\delta''=180°-MBA=180°-(OBA+u)=180°-OBA'-u$$
$$=\delta'-u=\delta'-e^2 M\cos^2 L\cos^2 z.$$

Pour éviter la confusion, j'appelle ici M l'angle AMB, que j'ai désigné par la lettre δ dans les formules des pag. 81, 82 et 83. On aura

$$\delta + \delta'' = 360° - MAB - MBA = 360° - (180° - M) = 180° + M.$$

Sans la réfraction terrestre, cette équation auroit toujours lieu sur l'ellipsoïde; et elle ne diffère de l'équation dans la sphère que par la correction très-légère qu'il faut appliquer à la distance observée δ' pour avoir δ'', et par la valeur de M, qui, pour une même corde AB, change de valeur suivant la latitude. *Voyez* la formule (42). Mais, à cause de la réfraction terrestre, on aura

$$\delta' + \delta'' + 2r = 180° + M$$

$$r = \tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta'' - 180°)$$

$$\frac{r}{M} = \frac{\tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta'' - 180°)}{M}.$$

Ces trois équations, qui sont données par les angles formés extérieurement à la corde AB par le prolongement des côtés MA et MB, et qui ne supposent pas l'égalité de ces côtés, sont analogues à celles que donne la sphère. On peut le vérifier sur la *figure* 25, en lisant M dans cette figure au lieu de C. Avec ce changement, la *figure* 25 va nous servir dans ce qui nous reste à dire sur la différence de niveau.

Nous aurons encore, comme dans la sphère,

$$ZAB = \delta + r = \delta + \tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{2}\delta'' + 90° = 90° + \tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta)$$

$$VBA = \delta'' + r = \delta'' + \tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{2}\delta - \tfrac{1}{2}\delta'' + 90° = 90° + \tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta).$$

Dans la sphère, quand deux objets sont de niveau, leurs distances au sommet de l'angle C, c'est-à-dire au centre de la sphère, sont égales; dans l'ellipsoïde, au contraire, l'angle M n'est pas au centre de la terre, et les distances au centre, ainsi que les distances au sommet M, sont inégales, à moins que les deux objets ne soient sur le même parallèle; et cette inégalité rend moins simple et moins aisée la détermination des différences de niveau. Cette même inégalité entraîne à sa suite celles des angles MAB et MBA lorsque les deux objets sont dans une même surface ellipsoïde.

Soit $y = \frac{1}{2}(\mathrm{MBA} - \mathrm{MAB})$, nous aurons

$$\operatorname{tang} y = \left(\frac{\mathrm{AM} - \mathrm{BM}}{\mathrm{AM} + \mathrm{BM}}\right) \operatorname{tang}\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}\mathrm{M})$$

$$= \frac{(\mathrm{AM} - \mathrm{BM}) \cot \frac{1}{2}\mathrm{M}}{2\,\mathrm{AM}} \text{ sans erreur sensible},$$

$$= \frac{\mathrm{AM} - \mathrm{BM}}{2\,\mathrm{AM} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{AM} - \mathrm{BM}}{2\,\mathrm{AM} \sin \frac{1}{2}\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{AM} - \mathrm{BM}}{\mathrm{AB}},$$

et

$$y = \frac{\mathrm{AM} - \mathrm{BM}}{\mathrm{AB} \sin 1''}, \quad \mathrm{MAB} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\mathrm{M} - y, \quad \mathrm{MBA} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\mathrm{M} + y.$$

Supposons maintenant que le signal, au lieu d'être en B (*fig.* 25) à la surface de l'ellipsoïde, et par conséquent de niveau avec A, soit en b' au-dessus de la surface, Bb' sera la différence de niveau, ou $\mathrm{B}b' = d\mathrm{N}$. On aura FIG. 25.

$$\mathrm{BA}b' = 180^\circ - \mathrm{ZA}b' - \mathrm{BAM} = 180^\circ - (\delta + r) - 90^\circ + \tfrac{1}{2}\mathrm{M} + y$$
$$= 90^\circ - (\delta + r) + \tfrac{1}{2}\mathrm{M} + y$$

$$\mathrm{A}b'\mathrm{B} = \mathrm{ABM} - \mathrm{BA}b' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\mathrm{M} + y - 90^\circ + (\delta + r) - \tfrac{1}{2}\mathrm{M} - y$$
$$= (\delta + r - \mathrm{M}).$$

Le triangle $\mathrm{BA}b'$ donne $\mathrm{B}b' = \dfrac{\mathrm{AB} \sin \mathrm{BA}b'}{\sin \mathrm{A}b'\mathrm{B}}$, ou

$$d\mathrm{N} = \frac{\mathrm{K} \sin[90^\circ - (\delta + r) + \frac{1}{2}\mathrm{M} + y]}{\sin(\delta + r - \mathrm{M})} = \frac{\mathrm{K} \cos(\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} - y)}{\sin(\delta + r - \mathrm{M})}$$

$$= \frac{\mathrm{K} \cos(\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} + y)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} - y - \frac{1}{2}\mathrm{M} + y)} = \frac{\mathrm{K} \cos(\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} - y)}{\sin[\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} - y - (\frac{1}{2}\mathrm{M} - y)]}$$

$$= \frac{\mathrm{K} \cos(\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} - y)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} - y)\cos(\frac{1}{2}\mathrm{M} - y) - \cos(\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} - y)\sin(\frac{1}{2}\mathrm{M} - y)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\mathrm{K}}{\cos \frac{1}{2}(\mathrm{M} - y)}\right) \cot(\delta + r - \frac{1}{4}\mathrm{M} - y)}{1 - \cot(\delta + r - \frac{1}{2}\mathrm{M} - y) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\mathrm{M} - y)}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{K}}{\cos(\frac{1}{2}\mathrm{M} - y)}\right) \cot(\delta + r - \tfrac{1}{2}\mathrm{M} - y)\,[1 + \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\mathrm{M} - y) \cot(\delta + r - \tfrac{1}{2}\mathrm{M} - y)].$$

Si l'on veut que la formule dépende de δ'', on substituera à (δ) sa valeur $180° + M - (\delta'' + 2r)$, et l'on aura

$$dN = \frac{K\cos(180° + M - \delta'' - 2r + r - \frac{1}{2}M - y)}{\sin(180° + M - \delta'' - 2r + r - M)} = \frac{K\cos(\frac{1}{2}M - \delta'' - r - y)}{\sin(-\delta'' - r)}$$

$$= -\frac{K\cos(\delta'' + r - \frac{1}{2}M + y)}{\sin(\delta'' + r)} = -\frac{K\cos(\delta'' + r - \frac{1}{2}M + y)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}M + y + \frac{1}{2}M - y)}$$

$$= -\frac{K\cos[\delta'' + r - (\frac{1}{2}M - y)]}{\sin[\delta + r - (\frac{1}{2}M - y)]\cos(\frac{1}{2}M - y) + \cos[\delta + r - (\frac{1}{2}M - y)]\sin(\frac{1}{2}M - y)}$$

$$= -\left(\frac{K}{\cos(\frac{1}{2}M - y)}\right)\cot[\delta'' + r - (\frac{1}{2}M - y)][1 + \mathrm{tg}(\frac{1}{2}M - y)]\cot[\delta'' + r - (\frac{1}{2}M - y)].$$

Eliminons r en mettant sa valeur $r = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta'' + 90°$; nous aurons

$$dN = \frac{K\cos(\delta + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta'' + 90° - \frac{1}{2}M - y)}{\sin(\delta + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta'' + 90° - M)} = \frac{K\cos(\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta'' - y + 90°)}{\sin(\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta'' - \frac{1}{2}M + 90°)}$$

$$= \frac{K\sin(90° - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta'' + y - 90°)}{\sin(180° - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta'' + \frac{1}{2}M - 90°)} = \frac{K\sin[\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) + y]}{\sin[90° - \frac{1}{2}(\delta - \delta'') + \frac{1}{2}M]}$$

$$= \frac{K\sin[\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) + y]}{\cos\frac{1}{2}(\delta - \delta'' - M)} = \frac{K\sin\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y\right)}{\cos\frac{1}{2}(\delta'' - \delta + M)}$$

$$= \frac{K\sin\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y\right)}{\cos\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + \frac{1}{2}M\right)} = \frac{K\sin\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y\right)}{\cos\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y + (\frac{1}{2}M - y)\right)}$$

$$= \frac{K\sin\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y\right)}{\cos\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y\right)\cos(\frac{1}{2}M - y) - \sin\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y\right)\sin(\frac{1}{2}M - y)}$$

$$= \frac{\left(\frac{K}{\cos(\frac{1}{2}M - y)}\right)\mathrm{tang}\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y\right)}{1 - \mathrm{tang}(\frac{1}{2}M - y)\,\mathrm{tang}\left(\frac{\delta'' - \delta}{2} + y\right)};$$

d'où l'on tire, en opérant comme page 95,

$$\tfrac{1}{2}(\delta''-\delta)+y=\left(\frac{dN}{K}\right)\cos(\tfrac{1}{2}M-y)-\tfrac{1}{4}\left(\frac{dN}{K}\right)^2\sin 2(\tfrac{1}{2}M-y)+\tfrac{1}{2}\&c.$$

Si l'on suppose $y = 0$ dans toutes ces formules, on retrouvera toutes celles que nous a données ci-dessus l'hypothèse de la terre sphérique; et cela doit être.

On peut presque toujours sans erreur sensible faire

$$dN = K\,\text{tang}\left(\frac{\delta''-\delta}{2}+y\right)=\frac{K\,\text{tang}\left(\frac{\delta''-\delta}{2}\right)+\text{tang}\,y}{1-\text{tang}\,y\,\text{tang}\left(\frac{\delta''-\delta}{2}\right)},$$

et même

$$\begin{aligned} dN &= K\,\text{tang}\left(\frac{\delta''-\delta}{2}\right)+K\,\text{tang}\,y \\ &= K\,\text{tang}\left(\frac{\delta''-\delta}{2}\right)+K\left(\frac{AM-BM}{AB}\right) \\ &= K\,\text{tang}\left(\frac{\delta''-\delta}{2}\right)+(AM-BM); \end{aligned}$$

mais par la formnle (41), page 79,

$$\begin{aligned} AM-BM &= AM-BO[1+e^2\sin dL\sin L\cos L+e^2\sin^2 dL(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}\cos^2 L)] \\ &= AM-BO[1+e^2\sin dL\sin L\cos L+e^2\sin^2 dL(-\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\cos 2L)] \\ &= AM-BO[1+e^2\sin dL\sin L\cos L-\tfrac{1}{4}e^2\sin^2 dL(1-3\cos 2L)] \\ &= \quad 1+\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 L+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}e^4\sin^4 L \\ &\quad -1-\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 L'-\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}e^4\sin^4 L' \\ &\quad\quad - e^2\sin dL\sin L\cos L-\tfrac{1}{2}e^4\sin dL\sin L\cos L\sin^2 L \\ &\quad\quad -\tfrac{1}{4}e^2\sin^2 dL(1-3\cos 2L) \\ &= \tfrac{1}{2}e^2(\sin^2 L-\sin^2 L')+\tfrac{3}{8}e^4(\sin^4 L-\sin^4 L')-\tfrac{1}{2}e^4\sin dL\sin^3 L\cos L \\ &\quad -e^2\sin dL\sin L\cos L-\tfrac{1}{4}e^2\sin^2 dL(1-3\cos 2L) \\ &= \tfrac{1}{2}e^2\sin(L-L')\sin(L+L') \\ &\quad -e^2\sin dL\sin L\cos L+\tfrac{3}{8}e^4 d(\sin^4 L)-\tfrac{1}{2}e^4\sin dL\sin^3 L\cos L \\ &\quad -\tfrac{1}{4}e^2\sin^2 dL(1-3\cos 2L) \\ &= \tfrac{1}{2}e^2\sin dL\sin 2L\cos dL \\ &\quad -\tfrac{1}{2}e^2\sin dL\cos 2L\sin dL-e^2\sin dL\sin L\cos L+\tfrac{3}{2}e^4\sin dL\sin^3 L\cos L \\ &\quad -\tfrac{1}{4}e^2\sin^2 dL(1-3\cos 2L)-\tfrac{1}{2}e^4\sin dL\sin^3 L\cos L \\ &= \tfrac{1}{2}e^2\sin dL\sin 2L(\cos dL-1)-\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 dL(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2L) \\ &\quad\quad +e^4\sin dL\sin^3 L\cos L, \end{aligned}$$

ou AM — BM

$$=R\left(-\tfrac{1}{2}e^2\sin d^2L\cos^2L-\tfrac{1}{2}e^2\sin^3 dL\sin L\cos L+e^4\sin dL\sin^3L\cos L\right).$$

Le premier terme dans notre méridienne ne passe jamais $0^{t},15$, et il décroît comme le quarré de dL; le dernier ne passe jamais $0^{t},15$, et il décroît comme dL. Le second terme est toujours insensible. On peut donc négliger y.

Quant à la correction de δ', son effet sur dN est

$$\tfrac{1}{2}\,K\,e^2\sin M\cos^2 L\cos^2 z,$$

et cette valeur n'est que de $0^{t},6$, en supposant $K = 30000^{t}$ et $\cos^2 L\cos^2 z = 1$. Or ce dernier facteur en France ne passe guère $\frac{1}{2}$. On peut donc aussi négliger ce terme; car il est fort au-dessous des erreurs de l'observation et des variations de la réfraction terrestre.

On peut donc calculer les différences de niveau comme sur la terre sphérique. Cependant l'applatissement n'est pas tout-à-fait négligé tant qu'on emploiera l'angle

$$M=\frac{K}{R\sin 1''}\left(1+\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 L\right).$$

Mais comme ce terme influe lui-même très-peu sur le résultat, on peut dans ces calculs faire pour toute la France

$$M=\frac{K}{R\sin 1''}\left(1+\tfrac{1}{4}e^2\right).$$

C'est ainsi que j'ai calculé les différences de niveau pour tous mes signaux, depuis Dunkerque jusqu'à Rodez; mais je me réserve de revenir sur cet objet quand j'aurai pu comparer aux résultats de mes observations ceux que le cit. Méchain aura tirés des observations de même genre qu'il a faites depuis Rodez jusqu'à Barcelonne.

Il me reste à parler de la manière dont j'ai calculé la réfraction dans les observations de latitude et d'azimuth.

Formules

Formules de réfraction pour les distances au Zénith, vraies et apparentes.

Pour vérifier la réfraction à l'horizon et à 45°, j'ai employé un nombre considérable d'observations de Bradley, de Piazzi, du cit. Méchain et de moi. Les unes paroissoient demander une petite augmentation dans la réfraction à 45°; d'autres, une diminution. Je me suis fait quatre tables de réfraction, que j'ai employées successivement à réduire mes observations de latitude. La table de Bradley tenoit à très-peu près le milieu entre toutes; et comme elle est presque universellement adoptée par les astronomes, j'ai fini par lui donner aussi la préférence, d'autant plus qu'il n'en peut résulter aucune erreur sensible dans les différences de latitude entre Dunkerque, Paris, Evaux, Carcassonne et Montjouy. Mais, en adoptant l'hypothèse de Bradley, j'ai voulu donner à mes calculs toute la précision dont sa règle est susceptible. Dans les observations azimuthales, on a besoin de la réfraction pour les hauteurs vraies et toutes les tables publiées jusqu'ici, dépendent de la distance apparente. J'ai donc cherché des formules pour ce cas aussi bien que pour l'autre. La table qui sert à corriger la réfraction selon les différentes hauteurs du baromètre et du thermomètre, est incommode et trop volumineuse. Sans rien changer au principe, j'ai tâché de rendre le calcul plus facile. Je vais exposer les moyens dont je me suis servi.

Soit z la distance apparente au zénith, R la réfraction horizontale, r la réfraction qui convient à la distance z, m et n deux constantes; nous aurons, comme on sait,

$$\sin(z - nr) = m \sin z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Si l'on suppose $z = 90°$; cette formule devient $m = \cos n\mathrm{R}$; donc

$$\sin(z - nr) = \cos n\mathrm{R} \sin z \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

On en déduit

$1 : \cos n\,R :: \sin z : \sin(z - n\,r)$

$1 + \cos n R : 1 - \cos n R :: \sin z + \sin(z - nr) : \sin z - \sin(z - nr)$

$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} n\,R : 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} n\,R :: \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(z + z - n\,r) : \text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r$

$\text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} n\,R\; \text{tang}\,(z - \tfrac{1}{2} n\,r) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

$$= \frac{\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} nR\, \text{tang}\, z - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} n\,R\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r}{1 + \text{tang}\, z\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r}$$

$\text{tang}\tfrac{1}{2} nr + \text{tang}\, z\, \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} n\,r + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} nR\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} nR\, \text{tg}\, z$

$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} n\,r + \sec^2 \tfrac{1}{2} n\,R \cot z\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} n\,R$

$(\text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r + \tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{1}{2} n\,R \cot z)^2 = \tfrac{1}{4} \sec^4 \tfrac{1}{2} n\,R \cot^2 z + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} n\,R$

$\text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r = -\tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{1}{2} nR \cot z \pm (\tfrac{1}{4} \sec^4 \tfrac{1}{2} n\,R \cot^2 z + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} nR)^{\frac{1}{2}}$

$$= + \tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{1}{2} nR \cot z \left[(1 + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} nR \cos^2 \tfrac{1}{2} nR\, \text{tang}^2 z)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{1}{2} n\,R \cot z \left[(1 + \sin^2 n\,R\, \text{tang}^2 z)^{\frac{1}{2}} - 1\right].$$

Soit

$$\text{tang}\, x = \sin n\,R\, \text{tang}\, z\,,$$

$$(1 + \sin^2 n R\, \text{tang}^2 z)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sec x - 1 = \text{tang}\, x\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} x\,;$$

donc

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2} n\,r = \tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{1}{2} n\,R \cot z\, \text{tang}\, x\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} x$$

$$= \tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{1}{2} n\,R \cot z \sin n\,R\, \text{tang}\, z\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} x$$

$$= \tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{1}{2} n\,R \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} nR \cos \tfrac{1}{2} n\,R\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} x$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} nR\; \text{tang}\, \tfrac{1}{2} x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ou sans erreur sensible $r = R\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$

On aura donc par un calcul direct la réfraction r qui convient à la distance apparente z, en évaluant ces deux équations bien simples

$$\text{tang}\, x = \sin n\,R\, \text{tang}\, z \quad \text{et} \quad r = R\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} x \ldots\ldots(6)$$

C'est ainsi que j'ai calculé la réfraction pour les observations de latitude avec plus de précision que les tables n'en peuvent donner. Or

$\text{tang}\, \tfrac{1}{2} x = 1 - \cot x + \tfrac{1}{2} \cot^2 x - \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{4} \cot^4 x + \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{4} . \tfrac{3}{6} \cot^6 x - \&c.$

$$\text{donc } r = R - \frac{R \cot z}{\sin n R} + \frac{R \cot^2 z}{2 \sin^2 n R} - \frac{R \cot^4 z}{2\,.\,4\ \sin^4\ n\ R}$$

$$+ \frac{3 R \cot^6 z}{2 . 4 . 6 \sin^6 n R} - \frac{3 . 5 R \cot^8 z}{2 . 4 . 6 . 8 \sin^8 n R} + \&c. . (7)$$

Cette série n'est suffisamment convergente que de 89 à 91° de distance au zénith ; elle donne à la fois deux réfractions par le seul changement de signe du second terme. Soit, par exemple, $z' = 180° - z$, r' et r les deux réfractions ; on aura

$$r' = r + \frac{2\,\mathrm{R}\cot z}{\sin n\mathrm{R}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Réduisons en série la valeur donnée ci-dessus pour tang $\frac{1}{2}nr$, et nous aurons

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr = \tfrac{1}{4}\sin^2 n\mathrm{R}\sec^2\tfrac{1}{2}n\mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,z(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 n\mathrm{R}\,\mathrm{tg}^2 z + \tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}\sin^4 n\mathrm{R}\,\mathrm{tg}^4 z - \&c.) \quad (9)$$
$$= \sin^2\tfrac{1}{2}n\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,z(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 n\mathrm{R}\,\mathrm{tg}^2 z + \tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}\sin^4 n\mathrm{R}\,\mathrm{tang}^4 z - \&c.)$$

Supposons avec Bradley $n = 6$ et $\mathrm{R} = 32'53''8$ pour $28^{\text{po.}}$ du baromètre, et 10° du thermomètre de Réaumur ; et retranchons de cette série l'excès de la tangente sur l'arc, nous aurons

$$r = 56'',64775\,\mathrm{tang}\,z - 0'',04664.6938\,\mathrm{tang}^3 z + 0'',00007.78129\,\mathrm{tg}^5 z$$
$$- 0'',00000.01580\,\mathrm{tang}^7 z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Le second terme n de cette série vaut 0'',1 à 45° 23' de distance au zénith, le troisième à 76° 35', et le quatrième à 81° 34'.

On peut donc employer très-commodément cette série au calcul d'une table depuis 0° jusqu'à 81° et même 84° ; ensuite on continueroit par les formules (6) ou par la série (7).

L'équation (2) donne encore

$$\cos n\mathrm{R}\sin z = \cos nr\sin z - \sin nr\cos z$$
$$\cos n\mathrm{R} = \cos nr - \sin nr\cot z$$
$$\cos nr = \cos n\mathrm{R} + \sin nr\cot z$$
$$\cos^2 nr = \cos^2 n\mathrm{R} + 2\sin nr\cos n\mathrm{R}\cot z + \sin^2 nr\cot^2 z$$
$$1 - \sin^2 nr = 1 - \sin^2 n\mathrm{R} + 2\sin nr\cos n\mathrm{R}\cot z + \sin^2 nr\cot^2 z$$
$$\sin^2 nr(1 + \cot^2 z) + 2\cos n\mathrm{R}\cot z\sin nr = \sin^2 n\mathrm{R}$$
$$\sin^2 nr + \frac{2\cos n\mathrm{R}\cot z\sin nr}{\mathrm{cosec}^2 z} = \sin^2 n\mathrm{R}\sin^2 z;$$

d'où

$$\sin nr = \cos n\mathrm{R}\sin z\cot z\left[(1 + \mathrm{tang}^2 n\mathrm{R}\sec^2 z)^{\frac{1}{2}} - 1\right]. (11)$$

Soit $\tang y = \frac{\tang nR}{\cos z}$, on aura $\sin nr = \sin nR \sin z \tang^{\frac{1}{2}} y$,

ou

$$r = R \sin z \tang^{\frac{1}{2}} y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

ou bien

$$\sin nr = \sin nR \cot nR \sin z \cos z \left[\left(1 + \frac{\tang^2 nR}{\cos^2 z}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

$$= \sin nR \sin z \left[(\cot^2 nR \cos^2 z + 1)^{\frac{1}{2}} - \cot nR \cos z\right],$$

ou

$$r = R \sin z \left[(1 + \cot^2 nR \cot^2 z)^{\frac{1}{2}} - \cot nR \cos z\right].$$

En comparant cette formule à la formule moyenne de Mayer, on voit qu'il a fait $R = 33'$ et $\cot nR = 16,5$; par conséquent $n = 6,3$.

On voit donc que la formule que Mayer a donnée sans démonstration est un corollaire des formules de Simpson et de Bradley. Ce qui la distingue, c'est la manière dont il y a fait entrer les variations de l'atmosphère, et la valeur des constantes; car, quoiqu'il fasse $R = 33'$, comme Bradley, c'est pour une autre température.

Soit maintenant v la distance vraie au zénith, $z = v - r$; donc

$$\tang \tfrac{1}{2} nr = \tg^2 \tfrac{1}{2} nR \tg(v - r - \tfrac{1}{2} nr) = \tg^2 \tfrac{1}{2} nR \tg\left[v - \left(\frac{n+2}{2}\right) r\right] \quad (13)$$

ou

$$\tang \tfrac{1}{2} nr = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} nR \tang v - \tang^2 \frac{1}{2} nR \tang \left(\frac{n+2}{2}\right) r}{1 + \tang v \tang \left(\frac{n+2}{2}\right) r};$$

d'où sans erreur sensible

$$\tfrac{1}{2} \tang nr + \tfrac{1}{2} n \left(\frac{n+2}{2}\right) \tg v \tg^2 r + \left(\frac{n+2}{2}\right) \tg^2 \tfrac{1}{2} nR \tg r = \tg^2 \tfrac{1}{2} nR \tg v$$

$$\left(\frac{n^2 + 2n}{4}\right) \tg v \tg^2 r + \left[\tfrac{1}{2} n + \left(\frac{n+2}{2}\right) \tg^2 \tfrac{1}{2} nR\right] \tang r = \tg^2 \tfrac{1}{2} nR \tg v;$$

d'où

$$\text{tang}\, r = \frac{n+(n+2)\text{tg}^2 \frac{1}{2} n\text{R}}{(n^2+2n)\,\text{tang}\, v}\left[\left(1+\frac{4(n^2+2n)\,\text{tg}^2 \frac{1}{2} n\text{R}\, \text{tg}^2 v}{(n+(n+2)\,\text{tg}^2 \frac{1}{2} n\text{R})^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right].$$

Soit $\text{tang}\, u = \frac{2\,(n^2+2n)^{\frac{1}{2}}\,\text{tang}\,\frac{1}{2} n\text{R}\,\text{tang}\, v}{n+(n+2)\,\text{tang}^2 \frac{1}{2} n\text{R}}$, on aura

$$r = \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{R tang}\, \tfrac{1}{2} u.$$

Soit $n = 6$

$$\text{tang}\, u = \frac{(48)^{\frac{1}{2}}\,\text{tang}\, 3\text{R}\,\text{tang}\, v}{3 + 4\,\text{tang}^2\, 3\text{R}},$$

et $r = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \text{R tang}\, \frac{1}{2} u = \text{R} \sin 60^\circ\, \text{tang}\, \frac{1}{2} u$ ....(14)

ou $\text{tang}\, u = 0.0662437\, \text{tang}\, v$ et $r = 1709'',36\, \text{tang}\, \frac{1}{2} u$.

Soit b la hauteur du baromètre pour l'instant de l'observation, t la hauteur du thermomètre au-dessus de 10° de Réaumur, r la réfraction moyenne, dr la correction de la réfraction, et m un coefficient constant; on aura la réfraction actuelle par cette équation

$$r + dr = \frac{br}{28(1+mt)},$$

et

$$dr = \frac{br}{28(1+mt)} - r = \frac{[b-28(1+mt)]r}{28(1+mt)} = \frac{(b-28-28mt)r}{28(1+mt)}$$

$$= \frac{(b-28)r}{28(1+mt)} - \frac{(28mt)r}{28(1+mt)} = \frac{(b-28)r}{28(1+mt)} - \frac{(mt)r}{(1+mt)}$$

$$= \frac{(b-28)r}{28(1+mt)} - \frac{(mt)r}{(1+mt)} + \frac{(b-28)mtr}{28(1+mt)} - \frac{(b-28)mtr}{28(1+mt)}$$

$$= \frac{(b-28)(1+mt)r}{28(1+mt)} - \frac{mtr}{1+mt} - \frac{(b-28)mtr}{28(1+mt)}$$

$$= \frac{(b-28)r}{28} - \frac{mtr}{1+mt} - \left(\frac{b-28}{28}\right)\left(\frac{mt}{1+mt}\right)r.$$

Le premier terme donnera une table qui ne dépendra que de b ou de la hauteur du baromètre.

Le second terme donnera une table qui ne dépendra que du thermomètre.

Le troisième terme a pour coefficient le produit des coefficiens

des deux premiers termes : on pourroit donc se dispenser de le réduire en table ; mais cette table, quoiqu'à double entrée, n'en sera guère plus embarrassante, parce que les nombres en seront très-petits, et souvent négligeables.

Les trois tables seront aussi commodes et beaucoup moins volumineuses que la table unique qu'on emploie ordinairement pour trouver la correction de la réfraction moyenne.

Les astronomes ne sont pas bien d'accord sur la valeur de m ; je l'ai supposée de 0.0055. *Voyez* l'*Astronomie* du cit. Lalande.

Je ne donnerai point ici la table de réfractions pour les distances apparentes, que j'ai calculée avec plus d'exactitude dans l'hypothèse de Bradley. Elle a été imprimée dans les derniers volumes de la *Connoissance des Temps.* Mais on trouvera à la suite de ce Mémoire la table pour les distances vraies, et les tables de correction pour les différentes hauteurs du baromètre et du thermomètre.

Hauteur des Signaux au-dessus de la Lunette.

J'ai dit ci-dessus, page 91, qu'il falloit réduire au sommet des signaux les distances au zénith observées. La formule que j'ai donnée, page 92, pour ces réductions, suppose que l'on connoisse dH ou la partie du signal qui s'élevoit au-dessus de la lunette. Dans les signaux ordinaires, dH se mesuroit directement. Dans les flèches embarrassées de charpente, on mesuroit le diamètre à deux hauteurs différentes avec la différence des deux hauteurs. Soient D et D′ les deux diamètres, h la différence des hauteurs, et x la partie du clocher qui s'élève au-dessus du diamètre D′, on a $h + x = \frac{\frac{1}{2} h\,D}{\frac{1}{2}(D - D')} = \frac{h\,D}{D - D'}$

$$x = \frac{h\,D}{D - D'} - h = \frac{h\,D - h\,D + h\,D'}{D - D'} = \frac{h\,D'}{D - D'}.$$

Ce moyen devenoit insuffisant quand la flèche étoit très-haute, comme celles d'Amiens et d'Orléans ; alors j'employois le procédé suivant.

Soit B (*fig.* 26) la pointe de la flèche, B′ la naissance de la même flèche ou le toit du bâtiment. Je mesurois l'angle ZAB et l'angle ZAB′. FIG. 26.

Dans le triangle BAB′, j'avois AB′ et l'angle BAB′, différence des deux distances au zénith. Or

$$\sin B : AB' :: \sin A : BB' = \text{hauteur de la flèche} = \frac{AB' \sin A}{\sin B}$$

$$= \frac{AB \sin u}{\sin[180^\circ - (\delta' + r') - u]} = \frac{AB \sin u}{\sin(\delta' + r' + u)}$$

$$= \frac{AB \sin u}{\sin[90^\circ + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(\delta' - \delta) + u]} = \frac{AB \sin u}{\sin[90^\circ - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(\delta' - \delta) + u]}$$

$$= \frac{AB \sin u}{\cos[\frac{1}{2}(\delta' - \delta) + \frac{1}{2}C - u]} = \frac{AB \sin u}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)\cos u + \sin\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)\sin u}$$

$$= \frac{AB \operatorname{tang} u \sec\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}{1 + \operatorname{tang} u \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}$$

$$= \frac{K \operatorname{tang} u}{\cos\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)}\left[1 - \operatorname{tang} u \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\delta' - \delta + C)\right].$$

Je mesurois ainsi BB′ de deux stations voisines, et je prenois le milieu entre les deux résultats dont la différence étoit légère.

Expression analytique d'un des angles d'un triangle rectiligne quelconque.

J'ai promis ci-dessus, page 32, la démonstration de la série qui sert à trouver l'un des angles inconnus d'un triangle rectiligne, quand on connoît deux côtés et l'angle compris. D'après ce qu'on a vu page 64, cette démonstration sera bien facile.

Soit donc un triangle rectiligne quelconque ABC; on sait qu'on a

$$\operatorname{tang} C = \frac{AB \sin A}{AC - AB \cos A} = \frac{\left(\frac{AB}{AC}\right)\sin A}{1 - \left(\frac{AB}{AC}\right)\cos A} = \frac{m \sin A}{1 - m \cos A}.$$

Cette équation est de même forme que celle de la page 64;

elle n'en diffère que par le signe de cos A. En la traitant de même, on obtiendra la formule qu'il s'agit de démontrer, c'est-à-dire

$$C = \left(\frac{AB}{AC}\right)\sin A + \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \sin 2A + \frac{1}{3}\left(\frac{AB}{AC}\right)^3 \sin 3A + \&c.$$

Si AB est plus petit que AC, la série sera convergente; elle divergeroit si AB étoit plus grand que AC.

Si AB = AC, le triangle sera isocèle, et l'on aura

$$C = 90^\circ - \tfrac{1}{2}A = \sin A + \tfrac{1}{2}\sin 2A + \tfrac{1}{3}\sin 3A + \&c.$$

Si A = 90°, on aura

$$C = 45^\circ = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7}.$$

Ces deux dernières séries, qui sont bien connues, ne sont donc que des cas particuliers de la série nouvelle.

Cette expression peut servir à calculer la parallaxe annuelle d'une planète fort éloignée du soleil, de la planète d'Herschel par exemple. AB seroit le rayon vecteur de la terre, AC la distance accourcie de la planète au soleil, et A l'angle au soleil dans le plan de l'écliptique.

Si AB est le rayon du globe terrestre, et AC la distance d'une planète à la terre, $\frac{AB}{AC}$ sera le sinus de la parallaxe horizontale; alors, si l'on fait A = 180° moins la distance vraie au zénith, C sera la parallaxe de hauteur, exprimée en parties du rayon. Pour l'avoir en secondes, on divisera le second membre de l'équation par sin 1″. Il suffira toujours de deux termes, même pour la lune. On sait que la formule dont les astronomes se servent pour calculer la parallaxe de hauteur, est indirecte quand on ne connoît que la distance vraie au zénith, et qu'on est obligé de faire une règle de fausse position. Si l'on met dans ma formule D = 180° — A, D étant la distance vraie au zénith, et sin x = sin parallaxe horizontale, on aura

$$C = \sin x \sin D - \tfrac{1}{2}\sin^2 x \sin 2D + \tfrac{1}{3}\sin^3 x \sin 3D - \&c.$$

Si D = 90°

$$C = \sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{5}\sin^5 x - \&c.$$

Applications

Applications des Formules précédentes.

Après avoir exposé en détail toutes les formules nécessaires pour résoudre les problêmes qui se rencontrent dans la mesure d'une méridienne et dans toutes les opérations géodésiques du même genre, il ne sera pas inutile d'en expliquer l'usage par quelques exemples, en faveur de ceux qui, étant appelés particulièrement à opérer sur le terrein, seroient moins familiarisés avec les formules analytiques.

Je supposerai l'observateur muni d'un *cercle de Borda;* c'est l'instrument le plus commode, le plus portatif, et celui de tous qui permet d'aspirer à une plus grande précision. Il ne seroit plus permis aujourd'hui, dans une opération de quelque importance, d'employer ni quarts de cercle ni théodolites ordinaires, encore moins les graphomètres; un cercle de Borda de deux décimètres de rayon suffira pour les opérations les plus délicates : moins grand de moitié, il seroit encore d'une exactitude suffisante pour toutes les opérations géographiques ou géodésiques ordinaires. On l'amène avec la plus grande facilité dans le plan des objets dont on a à mesurer les distances angulaires; on le fait passer en un instant de la situation horizontale à la situation verticale : enfin il est le seul avec lequel on puisse éluder les erreurs de la division; il suffit pour cela de multiplier les observations d'un même angle, assez pour ne plus trouver de différence sensible entre plusieurs mesures consécutives faites sur différentes parties du limbe.

Mon dessein n'est point de donner ici la description ni la manœuvre de cet instrument; on la trouvera dans l'*Exposition des Opérations faites en 1787 pour la jonction des Observatoires de Paris et de Greenwich*, et dans la *Connoissance des Temps de l'an VI.* D'ailleurs la seule inspection en dit plus que les plus longs discours, et c'est sur le cercle même que l'on peut, avec plus de fruit et de facilité, en étudier l'usage. Je me contenterai d'un petit nombre de remarques.

Les cercles dont je me suis servi portoient quatre alidades ; il est assez indifférent en général de mettre l'une ou l'autre sur le zéro en commençant une série d'angles : il suffit de se rappeler celle qu'on y a mise, afin de connoître le chemin qu'elle aura fait, l'arc qu'elle aura parcouru, entraînée par la lunette dans le cours des opérations. Il est bon pourtant de se faire une habitude constante. La mienne a été invariablement de mettre sur zéro l'alidade qui est à 100° à droite de l'oculaire. Il est inutile de lire à chaque observation conjuguée les quatre alidades ; il suffit le plus souvent de les lire au commencement et à la fin de chaque série. Dans les observations intermédiaires, on se contente de lire l'alilade qui est partie de 0° ; et quand cette alidade, que je nommerai *première*, est à angles droits avec la lunette, elle offre plus de facilité, parce qu'elle est mieux éclairée, et qu'elle n'est pas exposée à se trouver dans l'ombre du tube, comme celles qui sont vers l'oculaire ou vers l'objectif.

Si les alidades étoient exactement à angles droits, quand la première marqueroit zéro, la seconde marqueroit 100°, la troisième 200°, et la quatrième 300° ; et en rejetant les centaines, les quatre alidades dans toutes les positions montreroient les mêmes nombres pour les dixaines, les unités, les dixièmes, les centièmes et millièmes de grade. Il n'en étoit pas ainsi dans les instrumens qui m'ont été confiés ; chaque alidade montroit des nombres différens. Sur l'un de mes deux cercles on lisoit les quantités suivantes :

Alidades	1re	2e	3e	4e
	0,000	99,965	199,940	299,943.

Supposons qu'au bout de 10 angles elles aient marqué les nombres suivans, en tenant compte des circonférences entières parcourues durant la série

467,862	567,825	667,801	667,803.

En faisant les quatre soustractions par ordre, on auroit

arc parcouru	467,862	467,860	467,861	467,860,

et par un milieu entre les quatre.............467,86075

ou divisant par 10, parce qu'il y a 10 observations, on auroit pour l'angle simple 46,786075.

Cette manière de faire l'opération qui se présente la première à l'esprit n'est pas la plus simple ; il m'a paru plus commode de noter les observations comme il suit.

En commençant, je notois les complémens arithmétiques des quatre alidades ; ce qui se fait tout naturellement en lisant le *Vernier* à contre-sens, et mettant par la pensée 10 à la place de zéro, et réciproquement. Ainsi, dans l'exemple précédent, je lisois 0,000 0,035 0,060 0,057

Au dernier angle qui est ici le dixième, j'écrivois ainsi en abrégé

$$\left.\begin{matrix} 467{,}862 \\ 825+35 \\ 801+60 \\ 803+57 \end{matrix}\right\}$$ mettant à côté de chaque alidade le complément arithmétique qui lui appartient.

En effectuant les additions, j'avois

$$\left.\begin{matrix} 467{,}862 \\ 860 \\ 861 \\ 860 \end{matrix}\right\} 467{,}860\tfrac{1}{4} = 467{,}86075 \text{ par un milieu.}$$

On voit que l'opération est plus courte, et conduit au même résultat.

Pour trouver la valeur moyenne entre celles des quatre alidades, on voit qu'il suffit de faire la somme des chiffres qui ne leur sont pas communs, et d'en prendre le quart.

A la rigueur, il suffiroit de lire les alidades en commençant et en finissant, pourvu qu'on notât exactement le nombre des observations. On épargneroit du temps, et je l'ai fait dans des circonstances pressées ; mais il est très-bon de lire au moins la première alidade après chaque observation paire. En divisant chacun des arcs partiels par le nombre d'observations qui le compose, on voit si la série marche bien ; si l'on appercevoit quelques irrégularités, on pourroit rejeter les observations dans lesquelles on les remarqueroit.

Je suppose qu'on ait observé la série suivante:

NOMBRE DES OBSERVATIONS.	ARCS PARCOURUS.	ARCS SIMPLES.
2	93,574	46,7870
4	187,147	46,78675
6	280,723	46,78717
8	374,298	46,78725
10	467,868	46,7868
12	561,441	46,786751
14	655,014	46,78671
16	748,585	46,78656
18	842,159	46,78661
20	935,731	46,78655
22	1029,302 268 + 35 240 + 60 241 + 57 } 102,930075	46,786396

On voit que la série marche avec beaucoup de régularité; cependant, comme elle va toujours donnant des angles plus petits, à l'exception des angles 6 et 8, qui offrent une augmentation passagère, pour éliminer ces angles,

De l'angle octuple..............	374,298
Je retranche l'angle quadruple....	187,147
La différence est..............	187,151
Je la retranche du dernier arc....	1029,30075
Il me reste pour 18 angles........	842,10975
Et pour l'angle simple..........	46,786097

Les observations que je viens d'éliminer sont trop près du commencement pour que la petite irrégularité ne puisse, avec beaucoup de vraisemblance, s'attribuer aux erreurs de la division; ainsi ces angles doivent être conservés. On voit, au reste, que le résultat définitif n'est guère altéré par cette soustraction. L'angle n'est diminué que de 0°,000299, qui ne valent pas 1″ de l'ancienne division.

Manière de déterminer les Elémens de la réduction au centre de Station.

Quand j'observois à Dunkerque l'augle eutre les tours de Watteu et de Cassel, rapporté ci-dessus, j'étois obligé de me tenir à quelque distance du centre, et l'angle observé exige une correction. Pour être en état de la calculer, dès que la série précédeute fut terminée, l'instrument restant dans la position où il étoit pour la dernière observation, c'est-à-dire la lunette inférieure dirigée sur l'objet à droite, et la supérieure sur l'objet à gauche, je détachai la lunette supérieure pour la diriger sur le centre de la station, c'est-à-dire sur le ceutre du signal. Par ce mouvemeut, la première alidade, qui, après le dernier angle, marquoit 1029°,302, répondoit au point 1166°,90.

Puis dounant uu uouveau mouvemeut à la même lunette en la rameuaut dans la direction du centre, l'alidade répondoit au point. 1167,19

Après un troisième essai tout semblable elle marquoit 1167,00

Ainsi par un milieu. 1167,03

De ce uombre je retrauche celui du point de départ 1029,30

Différence. 137,73

Cette différence est l'angle entre l'objet à gauche et le centre de la station; c'est celui qui est nommé y dans mes formules de réductiou au ceutre, pag. 21 *et suiv.* Il se compte toujours suivant l'ordre des divisions de l'instrument, et il peut avoir toutes les valeurs possibles depuis 0 jusqu'à 400°.

Le centre de station est toujours trop voisin pour qu'il puisse se voir daus la lunette. On marque sur le haut du tube deux points, l'un vers l'objectif et l'autre vers l'oculaire, et l'on juge à l'œil si ces deux points et le centre sont bien dans une même ligne droite; et comme cette estime est toujours un peu

incertaine, on répète plusieurs fois cette observation, et l'on prend un milieu entre les résultats, qui, au reste, ne diffèrent jamais d'une quantité qui soit de la moindre conséquence.

A chacun de ces essais, on a soin de regarder dans la lunette inférieure, pour voir si l'instrument a bien gardé la même position, et l'on en est assuré quand l'objet à droite est resté bien exactement à l'intersection des fils. Si le point d'intersection s'étoit écarté de l'objet, on le ramèneroit dessus en tournant la vis du tambour, et l'on dirigeroit ensuite la lunette supérieure sur le centre de station; car l'angle y ne peut être bien déterminé si les deux lunettes ne sont pas en même temps, l'une sur l'objet à droite, et l'autre dans la direction du centre de station.

Connoissant ainsi l'angle y entre l'objet à gauche et la distance au centre, il ne reste plus qu'à mesurer cette distance. Pour cela, j'avois fait marquer sur le tube de la lunette supérieure un point qui étoit dans une même verticale avec le centre du cercle, et je mesurois avec un cordeau l'intervalle entre ce point et le centre de station, quand le centre étoit libre.

Cette distance est désignée par la lettre r dans les formules citées. L'une de ces formules suppose aussi l'angle $(O+y)$.

Nous venons de trouver y.	$137^{\circ},73$
L'angle observé = O étoit.	46,786
Ainsi $(O+y)$ est de.	184,516

La distance r étoit de $4^{m},2276$.

La distance de l'objet à droite ou D, étoit de 25479 mètres.

La distance de l'objet à gauche ou G, étoit de 27451 mètres.

Avec ces données, nous allons calculer la réduction au centre par la formule $c = \frac{r \sin(O+y)}{D \sin 1''} - \frac{r \sin y}{G \sin 1''}$.

Type d'un Calcul de réduction au Centre.

Log r.	0,62609		
Compl. sin 1″.	5,80388		
	+6,42997.		— 6,42997
sin 184,516 = (O + y)	+ 9,38171	sin 137,73 = y.	+ 9,91879
compl. D = 25479	5,59382	compl. G = 274451	5,56144
+ 25,439	1,40550	— 81,320	1,91020

première partie. . . . . + 25,439
réduction. . . . . — 55,881
angle observé. 46,7863,96
angle réduit au centre 46,7808,079

On commencera par chercher le log. de r, et l'on y ajoutera le complément arithmétique du sinus de 0°,0001 = une seconde décimale. La somme de ces deux logarithmes sert pour chacun des deux termes, avec cette différence que, pour le second terme, on la marque du signe —, pour indiquer que ce second terme est soustractif.

On cherche ensuite le logarithme du sinus de (O + y) = 184°,516, qui est égal à celui du cosinus de 84,516.

On cherche pareillement pour le second terme sin y = 137°,73, ou, ce qui revient au même, le cosinus de 37°,73.

Ces deux sinus sont positifs, parce que (O + y) et y sont moindres que la demi-circonférence.

Si (O + y) eût été plus fort que 200°, le sinus eût été négatif, et le premier terme de la formule seroit devenu soustractif.

Le second terme changeroit pareillement de signe, si l'angle y surpassoit 200°; et ce terme deviendroit additif.

On cherche ensuite les complémens arithmétiques des distances D et G, on les place comme on le voit dans l'exemple

ci-dessus; et faisant les deux sommes, on a les logarithmes des deux termes.

Le premier terme se trouve par-là de $+25\overset{\text{sec.}}{,}439$, ou $+0\overset{\circ}{,}0025439$.
Le second terme, de. . . . . —81,320, ou—0,0081520.

On retranche le plns petit du plus grand quand ils sont, comme ici, de signes différens, et l'on donne au reste le signe du plus grand. Ce reste est la correction cherchée.

S'ils avoient été de même signe, on auroit pris la somme, et l'on auroit donné à la correction le signe commun.

Dans cet exemple, je me suis servi des tables des sinus décimaux de Callet. Si l'on n'avoit que des tables sexagésimales ordinaires, on commenceroit par réduire tous les angles décimaux en angles sexagésimaux, comme je l'ai expliqué page 17, et l'on feroit le calcul comme il suit.

O	y
46,786396	137,63
46,786396	13,773
42,1077564	123, 9 5 7
6,495384	57, 4 2
27,92304	25.2
42,6,27,923	123,57,25,1
	42, 6,27,9
	$O + y =$ 166, 3,53

r.	0,62609		
C. sin 1″. . .	5,31443		
	5,94052		— 5,94052
sin (O+y) +	9,38170	sin y +	9,91879
compl. D	5,59382	compl. G	5,56144
+ 8″,244	0,91604	— 26″,348	1,42075
		+ 8, 242	
réduction.		— 18, 106	
angle observé. . .		42,6,27,923	
angle réduit. . .		42,5, 9, 817	

Pour

Pour calculer la réduction par la seconde formule

$$\frac{r \sin O \sin (A-y)}{D \sin A \sin 1''},$$

on a besoin de l'angle A, qui est l'angle à l'objet à droite, c'est-à-dire, dans notre exemple, l'angle à Watten entre Dunkerque et Cassel.

$r =$	4,2276.	0,62609
$\sin O =$	46,7863,96. . . .	9,82641
compl. $\sin A =$	82,754.	0,01614
$y =$	137,73. . C. sin 1″..	5,80388
$A - y =$	− 54,976.	− 9,88090
C.D =	25479.	5,59382
réduction. . .	− 55,878	1,74724
angle réduit	46,7808,082	

Ce calcul n'a pas besoin d'explication. Je me contenterai de dire que, pour ne pas laisser de vide vis-à-vis y, qui ne donne aucun logarithme, j'y place le complément arithmétique de sin 1″.

Quand y surpasse l'angle A, comme ici, $(A-y)$ est une quantité négative, et son sinus est également négatif, ainsi que la réduction. Mais si $(A-y)$ négatif surpassoit 200°, ou si A étoit plus grand que y, la correction seroit additive, parce que le sinus alors auroit le signe +.

On pourroit retrancher y de A dans tous les cas, en ajoutant, s'il le falloit, 400° à l'angle A; alors la règle des signes seroit plus simple. La correction seroit additive ou soustractive, selon que $A-y$ seroit plus petit ou plus grand que la demi-circonférence. Dans notre exemple $A-y$, ou $400° + A - y = 345{,}024$ et la correction soustractive.

La correction calculée par cette seconde formule se trouve un peu plus petite que la première. Cela vient du petit terme négligé. Ce petit terme est égal au produit du premier par

$-\frac{r \sin y \cos (A+O)}{D \sin A}$, et il donneroit environ $0{,}003^{sec.}$ à ajouter à la correction, parce que cos (A + O) est négatif. Alors les deux formules donneroient le même résultat; mais la différence est insensible.

Méthodes pour déterminer l'Angle de direction y *et la Distance au centre, quand le centre est invisible ou inaccessible.*

J'ai supposé dans ce qui précède qu'on pût mesurer directement la distance au centre, et diriger la lunette vers ce centre. Il faut pour cela que l'intérieur du signal soit libre, et l'on y suspend alors un fil à-plomb, qui peut en être considéré comme l'axe, et chaque point de ce fil représente le centre. Mais si le signal est une pyramide, une tour, un moulin, un bâtiment quelconque qui n'ait point d'ouverture, alors il faut, à l'aide du calcul et de mesures subsidiaires, suppléer aux mesures qu'on ne peut exécuter.

Supposons d'abord que le centre du signal soit au milieu de

FIG. 25. la diagonale D E (*fig.* 5).

Placez l'instrument en O, d'où vous puissiez appercevoir les deux points extrêmes D et E de la diagonale.

Mesurez la distance $OD = r'$ et la distance $OE = r''$, l'angle $FOD = y'$ et l'angle $FOE = y''$; les formules de la page 26 vous donneront

$$OC = r = \text{distance au centre},$$

et

$$FOC = y = \text{angle direction.}$$

Supposons, par exemple, que vous ayez trouvé

$$r' = 3{,}72^{m}, \quad r'' = 2{,}56^{m},$$

$$FOD = y' = 126{,}67^{\circ},$$

et

$$FOE = y'' = 178{,}47^{\circ},$$

vous aurez

$$y'' = 178^{\circ},47 \qquad r' = 3^{m},72$$
$$y' = 126,67 \qquad r'' = 2,56$$
$$y'' - y' = 51,80 \qquad r' - r'' = 1,16 \ldots \log \ldots\ldots 0,06446$$
$$y'' + y' = 305,14 \qquad r' + r'' = 6,28 \ldots \text{compl. log. } 9,20204$$
$$\tfrac{1}{2}(y''-y') = 25,90 \qquad \tang \tfrac{1}{2}(y''-y') = 25,90 \ldots 9,62435$$
$$\tfrac{1}{2}(y''+y') = 152,57 \qquad \tang \tfrac{1}{2} d = 5,146 \quad 8,89085$$
$$\tfrac{1}{2}\ d = 5,146 \qquad \tfrac{1}{2}(y''-y') - \tfrac{1}{2}d = u' = 20,754$$
$$y = 147,424 \qquad \tfrac{1}{2}(y''-y') + \tfrac{1}{2}d = u' = 31,046$$

$$\text{Log. } r' \ldots\ldots 0,57054 \qquad \log.\ r'' \ldots\ldots 0,40824$$
$$\cos u' \ldots\ldots 9,97650 \qquad \cos u'' \ldots\ldots 9,94617$$
$$r' \cos u' = 3^{m},5240 \quad 0,54704 \qquad r'' \cos u'' = 2^{m},2616 \quad 0,35441$$
$$r' \cos u' = 3,5240$$
$$\text{somme} = 5,7856$$
$$\text{moitié} = r = 2,8928$$

On a de cette manière les valeurs de r et de y, avec lesquelles on calculera la réduction au centre, comme ci-dessus.

On peut encore trouver y de deux manières.

$$y' = 126,67 \qquad y'' = 178,47$$
$$u' = 20,754 \qquad u'' = 31,046$$
$$y' + u' = y = 147,424 \qquad y'' - u'' = y = 147,424$$

Il arrivera souvent que r'' sera plus grand que r'; dans ce cas, $r' - r''$ sera négatif, $\frac{1}{2} d$ le sera pareillement, c'est-à-dire qu'il faudra le soustraire par-tout où on l'a ajouté dans le calcul précédent, et réciproquement.

Supposons, par exemple, qu'on ait $r' = 2^{m},56$ et $r'' = 3^{m},72$, tout demeurant d'ailleurs comme ci-dessus; on aura

$$r' - r'' = -\ 1^{m},16, \quad \tfrac{1}{2} d = -5^{\circ},146, \quad u' = 31^{\circ},046,$$
$$u'' = 20^{\circ},754, \quad y = \tfrac{1}{2}(y'' + y) + 5^{\circ},146 = 157^{\circ},716,$$
$$y = y' + u' = 157^{\circ},716, \text{ ou } y = y'' - u'' = 157^{\circ},716;$$

de sorte que si $r' > r''$, on aura $u' < u''$. Au contraire, si $r' < r''$, on aura $u' > u''$.

Du reste, le procédé est invariable.

Si $r' = r''$, alors le calcul devient plus simple ; car $\frac{1}{2}d = 0$, $y = \frac{1}{2}(y'' + y')$, $u' = u'' = \frac{1}{2}(y'' - y')$ et $r = r' \cos\frac{1}{2}(y'' - y')$; on fera donc bien de se placer, s'il est possible, de manière à ce que l'on ait $r' = r''$.

Les mêmes formules serviroient encore dans le cas où l'on auroit fait l'observation dans l'intérieur du signal.

Supposons, par exemple, que le rectangle DE soit l'intérieur d'une tour ou d'une chambre, et qu'on y ait fait l'observation par une fenêtre, le cercle étant en un point voisin de A sur le prolongement de CA, le calcul se fera comme ci-dessus : il arrivera seulement que l'angle $DOE = y'' - y'$ sera très-obtus.

Si le point O se confondoit avec A, l'angle $EOC = u''$ seroit droit

$$r'' \cos u'' = 0 \quad \text{et} \quad r = \tfrac{1}{2} r' \cos u'.$$

Si le point O étoit sur la ligne CA, l'angle u'' seroit obtus, $r'' \cos u''$ seroit négatif, et r seroit $\frac{1}{2}(r' \cos u' - r'' \cos u'')$.

Si le point O étoit sur la diagonale D, on s'en appercevroit aisément ; car alors

$$(y'' - y') = 200^\circ, \ \tang\tfrac{1}{2}d = \infty, \ \tfrac{1}{2}d = 100^\circ, \ u' = 0, \ u'' = 200^\circ,$$
$$r = \tfrac{1}{2}(r' - r'') \quad \text{et} \quad y = y'.$$

L'instrument seroit en quelque point de la ligne CE.

Si d'ailleurs l'observation avoit donné $r' = r''$, on seroit au centre même.

Mais si l'on avoit $r' > r''$, l'instrument seroit quelque part sur la ligne CD ; on auroit

$$u' = 200^\circ, \quad u'' = 0, \quad y = y' + 200^\circ \quad \text{et} \quad r = \tfrac{1}{2}(r'' - r').$$

Si l'instrument étoit de l'autre côté de la diagonale DE, on s'en appercevroit à ce que $(y'' - y')$ surpasseroit 200°. Je suppose toujours que D est le point qu'on rencontre le premier en tournant la lunette à gauche du dernier objet observé F, et E celui qu'on voit le second en continuant de tourner la lunette dans le

même sens. Alors tang $\frac{1}{2}(y''-y')$ seroit négative, et par conséquent aussi tang $\frac{1}{2}d$; $\frac{1}{2}d$ seroit un angle obtus, et même plus grand que $\frac{1}{2}(y''-y')$: mais il n'y aura jamais d'embarras réel pour trouver $y=\frac{1}{2}(y''-y')-\frac{1}{2}d$, ni pour trouver

$$r=\tfrac{1}{2}(r'\cos u'+\tfrac{1}{2}r''\cos u''),$$

si l'on se souvient que les cosinus sont négatifs dans le second et le troisième quarts de la circonférence.

Si l'on ne peut trouver par l'observation aucun point d'où l'on apperçoive les deux extrémités de la diagonale DE (*fig.* 5.), il FIG. 5. faudra se placer de manière à ce qu'on puisse voir les deux extrémités d'une même face DE (*fig.* 6.); alors on aura recours FIG. 6. aux formules de la page 30, en y changeant 90° en 100° et 45° en 50°, si l'on veut employer la division décimale, qui est plus commode.

Supposons à r', r'', y', y'' les mêmes valeurs que dans l'exemple précédent, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}(y''-y')=25{,}90,\qquad 100-\tfrac{1}{2}a=74{,}100.$$

$\log. r''=$	2,56	0,40824
compl. $\log. r'=$	3,72	9,42946
$\tan x=$	38,372.	9,83770
	$-$ 50	
$\tan(x-50°)=-$	11,628. . . . $-$	9,26649
$\tan(100-\frac{1}{2}a)=$	74,100. . . .	0,36565
$\tan\frac{1}{2}d=-$	25,783. . . . $-$	9,63214
$u'=$	48,317	
$u''=$	99,883	

Je change le signe de $\frac{1}{2}d$ dans les formules (3) et (4), parce que d est négatif; ce qui arrivera toutes les fois qu'on aura $x<50°$, et x sera $<50°$ toutes les fois que $r''<r'$.

Pour calculer les formules suivantes, il faut connoître les angles du triangle CDE, et ils dépendent des dimensions du signal.

Si le signal est carré, l'angle $C = 100^\circ$, l'angle $D = E = 50^\circ$.

Si le signal est rectangulaire, on aura

$$\text{tang}\, E = \cot \tfrac{1}{2} C = \frac{GD}{ED}.$$

Il peut arriver que ED soit le côté d'un hexagone; alors $C = 66{,}6667$, et les angles D et E seront aussi de $66{,}6667$.

J'ai trouvé aussi assez souvent des signaux octogones; alors $C = 50^\circ$, $D = E = 75^\circ$.

Supposons qu'on ait

$$\frac{GD}{ED} = \frac{36}{40} = 0{,}9\,; \quad \log \text{tang}\, E = 9{,}95424,$$

on aura $b = E = 46{,}652$.

$$\begin{array}{rlrl}
\tfrac{1}{2} C = & 53{,}348 & & \\
\tfrac{1}{2} a = & \underline{25{,}90} & & \\
\tfrac{1}{2}(C+a) = & 79{,}248 \ldots \ \log.\ \cot.\ . & & 9{,}52895 \\
\text{tang}\,(x - 50^\circ)\ \text{ci-dessus} & — & & \underline{9{,}26649} \\
\text{tang}\, \tfrac{1}{2} d' = — & 3{,}967 & — & 8{,}79544 \\
\tfrac{1}{2} a = & \underline{25{,}900} & & \\
p' = & 29{,}867 & p'' = & 21{,}933 \\
y' = & \underline{126{,}67} & y'' = & \underline{178{,}47} \\
y = & 156{,}537 & y = & 156{,}537
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl}
u' = & 48{,}317 & u'' = & 99{,}883 \\
b = & \underline{46{,}652} & b = & \underline{46{,}652} \\
u' + b = & 94{,}969 & u'' + b = & 146{,}535 \\
p' = & \underline{29{,}867} & p'' = & \underline{21{,}933} \\
u' + b + p' = & 124{,}836 & u'' + b + p'' = & 168{,}468
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl}
r' & 0{,}57054 & r'' & 0{,}40824 \\
\sin(u' + b) & 9{,}99864 & \sin(u'' + b) & 9{,}87188 \\
\text{C.}\sin(u' + b + p') & \underline{0{,}03393} & & \underline{0{,}32303} \\
r = 40097 & 0{,}60311 & r = 4{,}0101 & 0{,}60315
\end{array}$$

Il suffiroit d'un de ces deux calculs pour r; mais il est bon de les faire tous deux pour s'assurer qu'on ne s'est pas trompé

dans une opération qui est assez longue. On trouve ici entre les deux valeurs de r une différence de $\frac{4}{100000}$ de mètre ; ce qui est insensible.

On abrégeroit beaucoup le calcul, si l'on pouvoit se placer sur le prolongement de GD ou de l'un des autres côtés du quadrilatère.

Supposons donc que GDO soit une ligne droite : dans ce cas, il suffira de mesurer r' et y', et les côtés GD et DE ; on fera

$$\operatorname{tang} p = \frac{\frac{1}{2}\,ED}{r' + \frac{1}{2}\,GD},$$

$$y = y' + p,$$

$$\text{et } r = \frac{(r' + \frac{1}{2}GD)}{\cos p}.$$

Si l'on étoit placé sur le prolongement du côté opposé, en sorte que DEO fût nn angle droit, on feroit de même

$$\operatorname{tang} p = \frac{\frac{1}{2}\,ED}{r'' + \frac{1}{2}\,GD},$$

$$y = y'' - p,$$

$$\text{et } r = \frac{r'' + \frac{1}{2}\,GD}{\cos p}.$$

Si l'on ne peut se placer ainsi, on tâchera de faire en sorte que $r' = r''$; alors $\frac{1}{2}\,d$ et $\frac{1}{2}\,d'$ seroient nuls. On auroit

$$y = \tfrac{1}{2}(y'' + y')$$

$$r = \frac{r' \sin(100^\circ - \frac{1}{2}a + b)}{\sin(100^\circ - \frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}a)} = \frac{r' \cos(\frac{1}{2}a - b)}{\cos b}$$

$$= \frac{r' \cos\frac{1}{2}a \cos b + r' \sin\frac{1}{2}a \sin b}{\cos b} = r' \cos\tfrac{1}{2}a + r' \sin\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang} b$$

$$= r' \cos\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\,GD.$$

Dans ces trois suppositions, le calcul est si facile qu'il est bien superflu d'en rapporter des exemples.

Il m'est arrivé de ne pouvoir observer ni les deux extrémités de la diagonale DE (*fig.* 5.), ni celles de l'une des faces du signal (*fig.* 6.), parce que deux des angles du quadrilatère étoient engagés dans un autre bâtiment ; seulement j'avois pu marquer sur deux murs contigus deux points B et A (*fig.* 7.),

FIG. 5.
FIG. 6.
FIG. 7.

tellement placés que le centre du signal se trouvoit à l'intersection des perpendiculaires BM et AM.

Pour calculer dans ce cas l'angle y et la distance $OM = r$, j'avois mesuré $r' = OB$, $r'' = OA$, et l'angle

$$BOA = (y'' - y') = a.$$

FIG. 7. Joignez les points A et B (*fig.* 7.)

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,d = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,(OBA - OAB) = \left(\frac{r'' - r'}{r'' + r'}\right)\text{tang}\,(100^\circ - \tfrac{1}{2}a)$$

$$OBA = 100^\circ - \tfrac{1}{2}\,a + \tfrac{1}{2}\,d, \quad OAB = 100^\circ - \tfrac{1}{2}\,a - \tfrac{1}{2}\,d.$$

Si l'on avoit $r' > r''$, $\tfrac{1}{2}\,d$ changeroit de signe.

$$\text{tang}\,q = \text{tang}\,ABM = \frac{AM}{BM} = \frac{bB}{bA},$$

$$OBM = 100^\circ - \tfrac{1}{2}\,a + \tfrac{1}{2}\,d + q,$$

$$OAM = 100^\circ - \tfrac{1}{2}\,a - \tfrac{1}{2}\,d + 100^\circ - q = 200^\circ - \tfrac{1}{2}\,a - \tfrac{1}{2}\,d - q.$$

Dans le triangle OBM, on connoît les côtés $OB = r'$, $BM = bA$ et l'angle compris. On calculera le troisième côté $OM = r$ et l'angle BOM; alors on aura $y = y' + BOM$.

Le triangle MAO donnera, par un calcul semblable, $OM = r$ et $y = y'' - AOM$.

Il peut arriver qu'après avoir tendu un fil suivant OD, OE

FIG. 6. (*fig.* 6.), pour mesurer r' et r'', on ne puisse cependant amener la lunette dans l'une ou l'autre de ces directions pour mesurer y' ou y''. Dans ce cas, il faut mesurer le côté DE, et calculer l'angle DOE ou l'angle OED par les formules de la page 31. Il est inutile d'en rapporter des exemples; on en trouvera dans tous les livres de trigonométrie. Remarquez seulement que, dans ces deux formules, le signe radical doit embrasser le dénominateur aussi bien que le numérateur. Cette faute d'impression est essentielle à corriger.

Il est également inutile de rapporter des exemples de toutes les opérations indiquées depuis la page 31 jusqu'à la page 35; elles sont fondées sur les règles les plus simples de la trigonométrie rectiligne.

On

On pourroit se trouver plus embarrassé pour calculer x, pag. 35, et z, page 36.

La formule

$$\tang x = \frac{M - M'}{P - P'}$$

suppose que les deux distances à la méridienne sont vers l'est, et les distances à la perpendiculaire toutes deux vers le nord. Si quelqu'une de ces suppositions changeoit, on changeroit les signes pour les quantités qui seroient à l'ouest ou au midi de l'observatoire; alors il pourroit arriver plusieurs cas différens.

Si le numérateur et le dénominateur étoient tous deux positifs, x seroit dans le premier quart du cercle.

S'ils étoient tous deux négatifs, x seroit dans le troisième quart.

Si le numérateur est positif et le dénominateur négatif, x sera dans le second quart du cercle.

Enfin si le numérateur est négatif et le dénominateur positif, x sera dans le quatrième quart du cercle.

Si $M - M' = 0$, $x = 0$ ou $200°$, selon que le dénominateur est positif ou négatif.

Si $P - P' = 0$, $x = 100$ ou $300°$, selon que $M - M'$ est positif ou négatif.

Pour la formule qui donne z, il suffit d'observer que cot P est négative depuis 6^h du matin jusqu'à midi, positive depuis midi jusqu'à 6^h du soir; elle change de signe à midi et à 6^h.

Sin P est positif depuis midi jusqu'au coucher, négatif depuis le lever jusqu'à midi.

Supposons	$M = +\ 3021$	$P = +\ 30997$
	$M' = -\ 2747$	$P' = +\ 40868$
	$M - M' = +\ 5768$	$P - P' = -\ 9871$

Dans cet exemple, M est à l'est et M' à l'ouest; P et P' sont au nord.

Log. $(M - M')$	+	3,76103
compl. log. $(P - P')$	—	6,00564
$\tang x = 149° 42' 0''$......		9,76667

R

(M — M′) ayant le signe +, x est dans la première moitié du cercle.

(P — P′) ayant le signe —, x est dans le second quart.

L'observation a été faite le 7 octobre 1793, à 4ʰ 45′.

Pour 4ʰ, on a $4 \times 15° = 60°$
Pour 45′, on a $\frac{3}{4}$ (15°) = 11 15
donc P = 71 15′

L = latitude = 49° 22′ 45″.

La déclinaison du soleil pour ce jour-là, prise dans la *Connoissance des Temps*, étoit — 5° 51′ 2″. Je lui donne le signe —, parce qu'elle étoit australe; et sa tangente sera négative.

Cot P.	9,53078	compl. sin P. . . .	0,02368
sin L.	9,88026	cos L.	9,81361
+ 0,25766	9,41104	— tang D +	9,01059
		+ 0,07045	8,84788
1ᵉʳ terme		+ 0,25766	
cot z. . . .		0,32811	log. 0,51602

$z =$ 71° 50′
$x =$ 149 42
$x - z =$ 77 52
$\frac{1}{2}(x - z) =$ 38 56 sin. . . . 9,79825
id. . . . 9,79825
$r =$ 0,44444. . . . 9,64782
C. sin 1″. 5,31443
C. D = 11432. . . 5,94188
correction = 3″,167. . . 0,50063

A cause de $x > z$, le soleil étoit à droite, l'objet que l'on observoit avec la tour éclairée étoit à gauche; ainsi la correction est négative.

On peut déterminer $(x - z)$ par observation, et cela est plus commode : d'ailleurs on n'a pas toujours les distances M et P, ni la déclinaison du soleil.

Voici le procédé, qui est fort simple.

Mettez la lunette supérieure sur zéro, et dans cette position dirigez-la suivant la ligne OC, c'est-à-dire sur la tour éclairée. Fixez la lunette inférieure sur la même tour; elle sera aussi sur zéro. Cela fait, dégagez la lunette supérieure, et dirigez-la vers le soleil, sans changer d'ailleurs la position du cercle, de manière que la lunette inférieure reste constamment dirigée sur la tour.

Alors notez l'arc parcouru par la lunette supérieure, retranchez-en la demi-circonférence; le reste sera la valeur de $(x - z)$.

Dans notre exemple, on auroit trouvé pour l'arc parcouru. . . . . 257° 52′

demi-circonférence 180

reste $= (x - z) =$ 77 52

Si l'arc parcouru étoit moindre que la demi-circonférence; par exemple. . . . . 157° 52′

On prendroit le supplément à. 180

C'est-à-dire. . . . . 22° 8′

et l'on en concluroit que le soleil est de 22° 8′ à la gauche de la ligne OC, au lieu que, dans notre exemple, il étoit de 77° 52′ à droite.

L'observation que je viens d'indiquer ne seroit possible que dans le cas où le soleil seroit à l'horizon. S'il a une hauteur, comme il arrivera toujours, on dirigera la lunette à vue vers le point de l'horizon où répond le soleil, on suspendra un fil à-plomb devant le centre de l'objectif, et l'on remarquera si l'ombre de ce fil couvre bien le milieu du tube dans toute sa longueur; alors on sera sûr que la lunette est bien dans l'azimuth du soleil: si elle n'y étoit pas, on l'y amèneroit par un tâtonnement qui ne seroit ni long ni difficile.

Calcul de la Réduction à l'Horizon.

Ce calcul s'exécutera facilement, au moyen des tables I, II, III et IV qui sont à la fin de ce Mémoire. Les deux premières suffisent presque toujours.

Supposons qu'on ait observé un angle de. . . . 61° 9′ 27″,3 entre deux objets dont les distances au zénith aient été trouvées

	91° 25′ 51″
et.	91 32 45
$H + h =$	2 58 36
$H - h =$	6 54

$H + h$. . . .	+ 6,746	$H - h$. . . .	+ 0,010
	+ 12,19		− 34,89
	67,56		− 0,3489
	13,492		+ 82,23374
	6746	$n =$	+ 81,88484
	60714		
	+ 82,23374		

Je fais la somme de ces deux quantités en rejetant les 180°, et je l'appelle ($H + h$).

J'en fais aussi la différence, que j'appelle ($H - h$).

Avec ($H + h$) la table Ire me donne + 6,746.

Avec ($H - h$) la même table donne + 0,010.

Avec l'angle observé, la table II me donne + 12″,19 et — 34″,89.

Je multiplie 12,19 par le premier facteur trouvé + 6,746; le produit est + 82,23374.

Je multiplie pareillement — 34,89 par le second facteur 0,010; le produit est — 0,3489.

En réunissant ces deux produits, qui sont toujours de signes différens, j'ai $n = + 81''{,}88484$. C'est à très-peu près la réduction à l'horizon.

Pour l'avoir plus exactement, dans la table III, avec les hauteurs 1° 25′ 51″ et 1° 32′ 45″, je trouve le facteur 1,0007, par lequel il faut multiplier n. 81,88484

05732

Ainsi n sec H sec h = 81,94216

Avec l'angle observé 61° 9′, je trouve dans la table IV l'équation — 0″,013; c'est ce qu'il faudroit retrancher de n sec H sec h, si cette quantité eût été de 100″: mais elle n'est que de 82; il faut multiplier la correction — 0,013 par

$$\left(\tfrac{82}{100}\right)^2 = (0{,}82)^2 = 0{,}6724,$$

c'est-à-dire qu'il faut prendre environ les deux tiers de — 0″,013, c'est-à-dire — 0″009, et la réduction sera par conséquent. . . . . + 81″,933 = 1′ 21″,933

L'angle observé est.	61	9	27	30
Et l'angle réduit à l'horizon	61	10	49	23

On voit qu'on auroit pu, sans beaucoup d'inconvénient, s'en tenir à n. Cependant j'ai choisi dans tous les angles observés depuis Dunkerque jusqu'à Rodez, celui dans lequel ces petites attentions ont l'effet le plus sensible.

Il arrive souvent que les distances au zénith sont moindres que 90°; dans ce cas, le calcul se fait un peu différemment. Au lieu de rejeter 180° en faisant la somme H + h, on prend ce qui s'en manque pour aller à 180°. En voici un exemple.

Angle observé. . . . . 42° 6′ 10″,0

dist. zénith	89° 59′ 54″	table Ire	+ 0,020	. . . +	0,019
	89 50 23	table IIe	+ 7,94	. . . —	53,59
somme. . . .	179 50 17		+ 0,1588		0,5359
H + h =	9 43				48181
H — h =	9 31			—	1,01771
				+	0,1588
		n = réduction.		—	0,85891
		angle observé.			42 6 10,0
		angle à l'horizon. . . .			42 6 9,14

Après avoir fait la somme des deux distances au zénith, j'en prends le supplément à 180°, et ce supplément je l'appelle $H + h$. Le reste du calcul comme dans l'exemple précédent.

Quand la réduction est d'un petit nombre de secondes, et que les deux distances au zénith diffèrent peu de 90°, il est inutile de recourir aux tables III et IV.

Réduction de l'Angle sphérique horizontal à l'Angle rectiligne entre les cordes.

Pour calculer cette réduction, il faut commencer par convertir en minutes de degré les arcs terrestres qui comprennent l'angle observé, c'est-à-dire les distances de l'observateur aux deux signaux observés.

On pourroit à cette conversion employer la formule de la page 83, ou

$$\delta = \frac{K}{R \sin 1''} \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 L\right);$$

mais comme on n'a pas besoin en cela d'une si grande précision, on peut faire pour toute la France

$$\delta = \frac{K}{\sin 1''} \left(1 + \tfrac{1}{4} e^2\right),$$

Je ne donne point la table que je m'étois faite pour éviter ce petit calcul; on voit qu'elle dépend essentiellement de l'hypothèse qu'on adoptera pour l'applatissement.

Quand on aura déterminé les deux arcs terrestres δ et δ', on en prendra les moitiés, qu'on appellera P et Q; on fera la somme $P + Q$ et la différence $P - Q$. Avec ces nombres, on cherchera deux facteurs dans la table Ire, comme on a fait pour la réduction à l'horizon. Avec l'angle réduit à l'horizon, on cherchera les nombres *tang.* et *cotang.* dans la table II. On donnera le signe — au nombre *tang.* et le signe + au nombre *cotang.*

Prenons pour exemple l'angle 61° 10′ 49″,3, que nous avons ci-dessus réduit à l'horizon. J'avois pour cet angle

$P = 8',55$	$(P+Q)$ 0,069	$(P-Q)$ 0,000
$Q = 9,61$	$-$ 12,19	$+$ 34,89
$P+Q = 18,16$	10971	0.000
$P-Q = 1,06$	7314	
réduction.	$-$ 0,84111	
angle à l'horizon	61 10 49,3	
angle des cordes	61 10 48,46	

On voit combien ce calcul est simple. Le second terme est presque toujours insensible, car il dépend de la différence des deux arcs terrestres, et cette différence est rarement considérable.

J'ai exprimé P et Q en minutes et décimales de minutes sexagésimales ; cela est plus commode pour l'usage de la table I[re].

On obtiendra P et Q directement sous cette forme, en faisant

$$P = \frac{\frac{1}{2}K}{R \sin 1'}\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2 \sin^2 L\right).$$

La même formule donnera Q, en mettant au lieu du premier côté K la valeur de K′, K et K′ étant les deux cordes qui renfermeront l'angle qu'il s'agit de réduire.

Avant de passer aux calculs des observations d'azimuth ou de latitude, il convient de placer ici la solution d'un problême qui est souvent utile pour connoître exactement la position d'un signal qu'on se propose de placer, afin de savoir d'avance s'il donnera des triangles assez bien conditionnés, et se mettre en état de calculer les réductions des angles qu'on y observera. Il suffit pour cela que de ce signal on puisse appercevoir trois objets dont les positions soient connues.

Supposons que l'on veuille placer un signal en O (*fig. 2. pl. I.*); si de ce point on peut observer les trois points A, B, C, dont FIG. 2. pl. I.

la position soit connue, on pourra, sans sortir du point O, déterminer les triangles OAC, OAB et OBC. Il suffit pour cela d'observer les angles AOB et BOC. La solution que j'ai donnée de ce problême, se trouve dans la *Trigonométrie* de *Cagnoli.* Je supprimerai donc ici la démonstration; mais je donnerai avec plus de détail que dans l'ouvrage cité les formules qui renferment les valeurs de toutes les inconnues : elles dispenseront le calculateur de faire aucune figure.

Faites

$$\text{tang}\, x = \frac{AB \sin BOC}{BC \sin AOB}$$

$$S = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(ABC + AOB + BOC)$$

$$\text{tang}\, z = \cot(x + 45^\circ)\, \text{tang}\, S$$

$$OAB = P = S + z$$

$$OCB = Q = S - z$$

$$OB = \frac{AB \sin P}{\sin AOB} = \frac{BC \sin Q}{\sin BOC}$$

$$OA = \frac{AB \sin(P + AOB)}{\sin AOB} = \frac{AC \sin(Q - AOB)}{\sin(AOB + BOC)}$$

$$OC = \frac{BC \sin(Q + BOC)}{\sin BOC} = \frac{AC \sin(P - BAC)}{\sin(AOB + BOC)}.$$

Si, au lieu du point connu B, on avoit observé un point connu P en-deçà de la ligne AC, on auroit des formules semblables, et qui ne différeroient des précédentes que par la lettre P substituée à la lettre B. Seulement dans la seconde formule, il faudroit mettre $(360^\circ - APC)$ au lieu de ABC, et l'on auroit

$$S = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(360^\circ - APC + AOP + POC) = \tfrac{1}{2}(APC - AOP - POC).$$

Il faudroit aussi dans les septième et huitième formules changer en + le signe —.

Pour donner encore plus de généralité à ces formules, j'appelle premier objet celui qui est le plus à droite, second objet

objet celui qui est à la gauche du premier, et troisième objet celui qui est à la gauche du second.

A l'angle au premier objet entre les deux autres.
B l'angle au second objet.
C l'angle au troisième objet.
a la distance du premier au second objet.
b la distance du second objet au troisième.
c la distance du premier au troisième.
m l'angle observé entre le premier et le second objet.
n l'angle observé entre le second et le troisième objet.
D la distance de l'observateur au premier objet.
D' distance de l'observateur au second.
D'' distance de l'observateur au troisième.

Faites

$$\text{tang}\, x = \frac{a \sin n}{b \sin m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$S = 180° - \tfrac{1}{2}(B + m + n) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ou

$$S = \tfrac{1}{2}(B - m - n)$$

selon que le second objet est au-delà ou en-deçà de la ligne c, qui joint le premier objet au troisième.

$$\text{tang}\, z = \cot(x + 45°)\ \text{tang}\, S \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$p = S + z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$q = S - z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

z changeroit de signe si la tangente de z étoit négative.

$$D' = \frac{a \sin p}{\sin m} = \frac{b \sin q}{\sin n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$D = \frac{a \sin(p+m)}{\sin m} = \frac{c \sin(q-c)}{\sin(m+n)} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$D'' = \frac{b \sin(q-n)}{\sin n} = \frac{c \sin(p-A)}{\sin(m+n)} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Dans les formules (7) et (8), on mettra $(q + C)$ et $(p + A)$ dans le cas où l'objet du milieu seroit en-deçà de la ligne c.

Si la somme $(m + n)$ des deux angles observés se trouvoit de 180° juste, ce seroit une preuve que l'observateur seroit sur la ligne c qui joint le premier et le troisième objet.

Dans ce cas, on auroit $\sin m = \sin n$ et $\tang x = \frac{a}{b}$,

$S = 180° - \frac{1}{2}(B + 180°) = 180° - 90° - \frac{1}{2}B = 90° - \frac{1}{2}B$.

z seroit la demi-différence des angles A et C, qui est connue; on auroit $p = A$ et $q = C$.

Dans les formules (7) et (8), on auroit

$$q - C = 0, \quad p - A = 0, \quad \sin(m + n) = 0.$$

D et D″ ne pourroient se calculer que par une seule formule; car la seconde donneroit

$$D = \frac{C \sin o}{\sin o} \text{ et } D'' = \frac{C \sin o}{\sin o}.$$

Tout le calcul se réduiroit à celui de deux triangles rectilignes.

Si la somme $(m + n)$ surpassoit 180°, ce seroit une preuve que l'observateur seroit dans l'intérieur du triangle connu; et, dans ce cas, il faudroit écrire $(C - q)$ et $(A - p)$ dans les secondes expressions de D et D″. Les autres formules n'éprouveroient aucun changement.

Type du Calcul.

Supposons que l'on ait trouvé par observation

$$m = 34° \ 22' \ 1'',5$$
$$n = 54 \ 45 \ 6,2$$
$$m + n = 89 \ 7 \ 7,7$$

et que le triangle connu donne

$$A = 63° \ 13' \ 40'',8$$
$$B = 77 \ 32 \ 41,0$$
$$C = 39 \ 13 \ 38,2$$

et les logarithmes suivans pour les trois côtés

log *a*. . . . 4,0201539,1
log *b*. . . . 4,1699204,9
log *c*. . . . 4,2088199,0

B........	77° 32′ 41″,0
m + *n*....	89 7 7,7
B + *m* + *n*	166 39 48,7
½(B+*m*+*n*)	83 19 54,3
S........	96 40 5,6
z........	5 58 3,0
p........	102 38 8,6
q........	90 42 2,6
n........	54 45 6,2
q + *n*....	145 27 8,8
p........	102 38 8,6
m........	34 22 1,5
p + *m*....	137 0 10,1
p........	102 38 8,6
A........	63 13 40,8
p — A....	39 24 27,8
q........	90 42 2,6
C........	39 13 38,2
q — C....	51 28 24,4

log *a*......	4,0201539,1
C. sin *m*...	0,2483415,3
C. log *b*...	5,8300795,1
sin *n*.....	9,9120407,0
tang *x* = 45° 42′ 0″,6	0,0106156,5
45	
cot 90 42 0,6	— 8,0871003,8
tang S..	— 0,9321437,2
tang *z* = 5° 58′ 3″,0	+ 9,0192441,0

On a marqué du signe — les deux tangentes, parce qu'elles appartiennent à des arcs plus grands que 90°.

On a marqué du signe + la tangente de *z*, parce que le produit est composé de deux facteurs négatifs.

a.	4,0201539,1	*c*.	4,2088199,0
C. sin *m*.	0,2483415,3	sin (*q* — C). . .	9,8933841,9
sin (*p* + *m*). .	9,8537605,7	C. sin (*m* + *n*). .	0,0000513,7
D... 12654,82	4,1022560,1	D... 12654,81	4,1022554,6
a.	4,0201539,1	*b*.	4,1699204,9
C. sin *m*.	0,2483415,3	C. sin *n*.	0,0879593,0
sin *p*.	9,9893521,6	sin *q*.	9,9999675,7
D′... 18107,05	4,2578476,0	D′... 18107,04	4,2578473,6
b.	4,1699204,9	*c*.	4,2088199,0
C. sin *n*.	0,0879593,0	C sin (*m* + *n*)	0,0000513,7
sin (*q* + *n*). . .	9,7536520,7	sin (*p* — A). . .	9,8026606,5
D″... 10269,01	4,0115318,6	D″... 10269,01	4,0115319,2

On a ainsi de deux manières chacune des trois distances du lieu de l'observation aux points connus. Si l'on trouve la même chose par le double calcul pour chaque distance, on sera certain de ne s'être pas trompé; et c'est pour qu'on ait cette vérification que j'ai donné double formule.

FIG. 2. D est la distance O A (*fig.* 2.), D′ la distance O B, et D″ la distance O C; p est l'angle O A B, q l'angle O C B. Par conséquent, $(p + m) = 180° - \text{OBA}$, et $q + n = 180° - \text{OBC}$; $(p - \text{A})$ est l'angle O A C, et $(q - \text{C})$ l'angle O C A : on connoît donc tout, angles et côtés, dans les trois triangles O A B, O B C, O A C.

Donnons maintenant un exemple pour le cas où l'objet du milieu, au lieu d'être en B par-delà A C, seroit en-deçà, comme en P.

Supposons qu'on ait les données suivantes :

A	34° 32′ 51″,0	log a	4,0529238,6	m	34° 22′ 1″,5
B	102 27 19,0	b	3,9728153,6	n	54 45 6,2
C	42 59 50,0	c	4,2088199,0	$m+n$	89 7 7,7

	log a	4,0529238,6
	C. log b	6,0271846,4
	sin n	9,9120407,0
	C. sin m	0,2483415,3
tang x = 60° 6′ 36″,5		0,2404907,3
45		
$(x+45°)$ 105 6 36,5		

B....	102° 27′ 19″,0	cot $(x+45°)$	—9,4314807,4		
$(m+n)$	89 7 7,7	tang S	+9,0678555,7		
B—$(m+n)$	13 20 11,3	tg z—1° 48′ 29″,0	—8,4992361,1		
S....	6 40 5,6				
z —	1 48 29,0	p...	4° 51′ 36″,6	q...	8° 28′ 34″,6
p....	4 51 36,6	m...	34 22 1,5	n...	54 45 6,2
q....	8 28 34,6	$(p+m)$	39 13 38,1	$q+n$	63 13 40,8

p...	4° 51′ 36″,6	q...	8° 28′ 34″,6
A...	34 32 51,0	c...	42 59 50,0
$(p+\text{A})$	39 24 27,6	$(q+\text{C})$	51 28 24,6

	a.	4,0529238,6
	C. sin m. . . .	0,2483415,3
	sin $(p+m)$. .	9,8009903,2
D.	12654,81	4,1022557,1
	a : sin m. . . .	4,3012653,9
	sin p.	8,9280073,3
D′.	1695,40	3,2292727,2
	b.	3,9728153,6
	C. sin n. . . .	0,0879593,0
	sin $(q+n)$. . .	9,9507572,6
D″.	10269,09	4,0115319,2
	c.	4,2088199,0
	C sin $(m+n)$	0,0000513,7
	sin $(q+C)$. . .	9,8933847,1
D.	12654,82	4,1022559,8
	b : sin n. . . .	4,0607746,6
	sin q.	9,1684987,5
D′.	1695,40	3,2292734,1
	c : sin $(m+n)$	4,2088712,7
	sin $(p+A)$. .	9,8026601,3
D″.	10269,08	4,0115314,0

On voit que les distances D et D″ sont les mêmes que dans le calcul précédent ; et cela devoit être. Quant à la distance D′ on O P, elle doit différer du D′ du calcul précédent de toute la quantité P B.

Nous allons maintenant calculer un exemple, dans lequel l'observateur étoit dans l'intérieur du triangle. Les lignes a, b, c sont les distances d'Amiens à Sourdon, Villers-Bretonneux et Vignacourt.

A.... 49° 4′ 13″,0 log a.... 4,0011254,8 m 60° 31′ 53″,8
B.... 99 5 49,2 b.... 4,1571938,7 n 130 44 16,5
C.... 31 49 57,8 c.... 4,2734543,6 m+n 191 16 10,3

log a.... 4,0011254,8
C.log b.... 5,8428061,3
C.sin m.... 0,0601677,5
sin n.... 9,8794987,9
tang x... 31° 16′ 54″,2 9,7835981,5
45
(x+45°)... 76 16 54″,2

B... 99° 5′ 49″,2 cot (x+45°) 9,3875886,1
(m+n) 191 16 10,3 tang S... 9,8422668,3
(B+m+n) 290 21 59,5 z... 9° 38′ 6″,4 9,2298554,4
½(B+m+n) 145 10 59,75
S... 34 49 0,25 p.... 44° 27′ 6″,6 q... 25° 10′ 53″,8
z... 9 38 6,4 m.... 60 31 53,8 n... 130 44 16,5
p... 44 27 6,6 (p+m) 104 59 0,4 (q+n).. 155 55 10,3
q... 25 10 53,8

C.... 31° 49′ 57″,8 A... 49° 4′ 13″,0
q.... 25 10 53,8 p... 44 27 6,6
(C−q) 6 39 4,0 (A−p) 4 37 6,4

a. . . . . . 4,0011254,8 c. 4,2734543,6
C.sin m. . . 0,0601677,5 C.sin (m + n) 0,7090208,5
sin (p + m) 9,9849773,8 sin (C−q) 9,0637957,4
D.... 11124,25 4,0462706,1 D... 11124,25 4,0462709,3

a : sin m... 4,0612932,3 b. 4,1571938,7
sin p... 9,8452899,9 C.sin n. . . . 0,1205012,1
D′..., 8064,61 3,9065832,2 sin q. . . . 9,6288882,2
D′.... 8064,61 3,9065833,0

b : sin n... 4,2776950,8 C : sin (m+n) 4,9824751,9
sin (q+n)... 9,6106806,9 sin (A−p) 8,9059026,4
D″.... 7733,49 3,8883757,7 D″.... 7733,53 3,8883778,3

Il y a quelque légère différence entre les deux valeurs de D″; la première est la plus sûre ; car il suffiroit d'un dixième de seconde d'erreur sur $(A - p)$ pour expliquer la différence.

Si les trois points A, B, C n'étoient connus que par leur distance à la méridienne et à la perpendiculaire d'un lieu donné, par exemple à l'observatoire de Paris, on pourroit trouver directement la distance de l'observatoire à cette même méridienne et à cette même perpendiculaire par les formules suivantes.

Soit A l'angle observé entre l'objet le plus à droite et l'objet qui suit immédiatement en allant vers la gauche, B l'angle observé entre l'objet le plus à droite et l'objet le plus à gauche.

M′, M″, M‴ les distances des trois objets connus à la méridienne.

P′, P″, P‴ les trois distances à la perpendiculaire.

Cherchez un angle φ par cette formule

$$\tang \varphi = \frac{(M''' - M')\cot B - (M'' - M')\cot A - (P''' - P'')}{(P'' - P')\cot A - (P''' - P')\cot B - (M''' - M'')};$$

puis une quantité x par l'une des deux formules suivantes.

$$1^\circ.\, x = \frac{(M'' - M')\cos\varphi\cos(\varphi - A) + (P'' - P')\cos\varphi\sin(\varphi - A)}{\sin A}$$

$$2^\circ.\, x = \frac{(M''' - M')\cos\varphi\cos(\varphi - B) + (P''' - P')\cos\varphi\sin(\varphi - B)}{\sin B};$$

puis $$y = -x \tang \varphi.$$

Alors, nommant M et P les distances de l'observateur à la méridienne et à la perpendiculaire, on aura

$$M = M' - y, \quad P = P' - x.$$

Soient à présent D′, D″, D‴ les distances de l'observateur aux trois points connus, on aura

$$D' = \frac{x}{\cos\varphi}$$

$$D'' = \frac{x + (P'' - P')}{\cos(\varphi - A)}$$

$$D''' = \frac{x + (P''' - P')}{\cos(\varphi - B)}.$$

Pour ces trois formules, il est inutile de faire attention aux signes des cosinus.

Ces formules sont générales; mais il faut faire attention à tous les changemens de signe; elles supposent que les M sont à l'ouest de la méridienne. Si elles étoient à l'est, on leur donneroit le signe négatif. Elles supposent encore que les P sont au nord. S'ils étoient au midi, ils deviendroient négatifs.

Pour connoître la valeur exacte de φ, il faut faire attention au signe du numérateur et du dénominateur de la fraction qui donne tang φ. Si tous deux sont positifs, φ sera dans le premier quart.

Si le numérateur est positif et le dénominateur négatif, φ sera dans le second quart, c'est-à-dire qu'il faudra prendre le supplément à 180° degrés de l'angle donné immédiatement par les tables.

Si le numérateur est négatif et le dénominateur aussi négatif, φ sera dans le troisième quart, et il faudra ajouter 180° à l'angle donné par les tables.

Si enfin le numérateur est négatif et le dénominateur positif, φ sera dans le dernier quart, et l'on prendra le supplément à 360° de l'angle donné par les tables.

Ces règles ont leur application toutes les fois qu'on trouve une tangente au moyen d'une valeur fractionnaire.

Pour exemple de ces formules, nous allons chercher la distance de Villers-Bretonneux à la méridienne et à la perpendiculaire de l'observatoire de Paris, en prenant toutes les données du problême dans la *Méridienne vérifiée.*

Angle entre Vignacourt et Sourdon $= A =$ 99° 5′ 45″,0
Angle entre Vignacourt et Arvillers $= B =$ 159 26 34,0

Pour Vignacourt	$M' = + 5148{,}5$	$P' = + 67084{,}75$
Pour Sourdon	$M'' = - 2329{,}0$	$P'' = + 49863{,}00$
Pour Arvillers	$M''' = - 11534{,}3$	$P''' = + 51884{,}75$

On voit que tous les P sont au nord; M'' et M''' sont négatives, parce qu'elles sont à l'est.

Cela

Cela posé, le calcul se fera comme il suit :

$M''' = -\ 11534,3$	$M'' = -\ 2329,0$	$P''' = +\ 51884,75$
$M' = -\ 5148,5$	$M' = +\ 5148,5$	$P'' = +\ 49863,0$
$(M'''-M') = -\ 16682,8$	$(M''-M') = -\ 7477,5$	$(P'''-P'') = +\ 2021,75$
$P'' = +\ 49863,00$	$P''' = +\ 51884,75$	$M''' = -\ 11534,3$
$P' = +\ 67084,75$	$P' = +\ 67084,75$	$M'' = -\ 2329,0$
$(P''-P') = -\ 17221,75$	$(P'''-P') = -\ 15200,00$	$(M'''-M'')\ -\ 9205,3$

$+(M'''-M') = -\ 16682,8$	$-\ 4,2222690$	$-(M''-M') = +\ 7477,5$	$+\ 3,8737564$
$\cot B = 159^\circ\ 26'\ 34'',0$	$-\ 0,4259416$	$\cot A = 99^\circ\ 5'\ 45'',0$	$-\ 9,2043899$
$+\ 44484,7$	$+\ 4,6482106$	$-\ 1197,1$	$-\ 3,0781463$

premier terme $+\ 44484,7$
$+\ 43287,6$
$-\ (P'''-P'') = -\ 2021,75$
numérateur $= +\ 41265,85$

$+(P''-P') = -\ 17221,75$	$-\ 4,2360273$	$-(P'''-P') = +\ 15200,0$	$+\ 4,1818436$
cot A.	$-\ 9,2043899$	cot B.	$-\ 0,4259416$
$+\ 2757,2$	$+\ 3,4404672$	$-\ 40530,8$	$-\ 4,6077852$

premier terme $+\ 2757,2$
$-\ 37773,6$
$-(M'''-M'') = +\ 9205,3$
compl. log. dénominateur $= -\ 28568,3$ . . . $-\ 5,5441156$
log. numérateur $= +\ 41265,85$ $+\ 4,6155908$

$\varphi = 124^\circ\ 41'\ 41''$	$\tan \varphi = 124^\circ\ 41'\ 41''$	$-\ 0,1597064$
$A = 99\ \ 5\ \ 45$	$B = 159\ \ 26\ \ 34$	
$(\varphi-A) = 25\ \ 35\ \ 56$	$(\varphi-B) = 325\ \ 15\ \ 7$	
	ou $-\ 34\ \ 44\ \ 53$	

$\cos \varphi$	$-\ 9,7552677$	$\cos \varphi$	$-\ 9,7552677$
C. $\sin A$	$+\ 0,0054958$	C. $\sin A$	$+\ 0,0054958$
$(M''-M')$	$-\ 3,8737564$	$(P''-P')$	$-\ 4,2360273$
$\cos(\varphi-A)$	$+\ 9,9551299$	$\sin(\varphi-A)$	$+\ 9,6355324$
$+\ 3887,3$	$+\ 3,5896498$	$+\ 4288,9$	$+\ 3,6323232$

premier terme $+\ 3887,3$
$x = 8176,2$

T

	$\cos\varphi$ − 9,7552677		$\cos\varphi$ − 9,7552677
	C. $\sin B$ + 0,4545164		C. $\sin B$ + 0,4545164
	$(M'''-M')$ − 4,2222690		$(P'''-P')$ − 4,1818436
	$\cos(\varphi-B)$ + 9,9146954		$\sin(\varphi-B)$ − 9,7558511
+22220,2	+ 4,3467485	− 14043,6	− 4,1474788

premier terme + 22220,2

$x = +$ 8176,6

ci-dessus $x = +$ 8176,2

par un milieu $x = +$ 8176,4. . . . + 3,9125621

− $\tan\varphi$ + 0,1597064

$y = +$ 11810,5 + 4,0722685

$M' = +$ 5148,5

$M = M' - y = -$ 6662,0 $P' = +$67084,75

$x =$ 8176,4

$P = P' - x =$ 58908,35

la *Méridienne vérifiée* donne M = − 6662,5 et P = 58907,75

Dans ce problême, les distances D′, D″ et D‴ sont assez inutiles. Si pourtant on veut les connoître, en voici le calcul:

$\log x$ 3,9125621		$x =$ 8176,4	
C. $\cos\varphi$ 0,2447323		$+(P''-P') =$ −17221,75	
D′=14364,6 4,1572944		− 9045,35	− 9,9564254
14365,5 *Mérid. vérif.*		C. $\cos(\varphi-A)$	0,0448701
		D″ = 10029,9	4,0012955
		Mérid. vérif. 10029,5	

$x =$ 8176,4

$(P'''-P') =$ − 15200,0

7023,6. . . 3,8465598

C. $\cos(\varphi-B)$ 0,0853046

D‴ = 8548,0 3,9318644

Mérid. vérif. 8547,3

Pour la démonstration de ces formules, il faudroit une figure particulière, que le lecteur pourra faire d'après ce qui suit.

Imaginez la méridienne O N menée de l'observatoire vers le nord, c'est-à-dire de bas en haut; la perpendiculaire O V vers l'ouest ou de droite à gauche.

Dans l'angle formé par ces deux lignes, placez trois points A, B et C de droite à gauche, de manière que A soit le plus près de la méridienne et le plus loin de la perpendiculaire, C le plus loin de la méridienne et le plus près de la perpendiculaire. Enfin donnez à B une position intermédiaire entre A et C, tant par rapport à la méridienne que par rapport à la perpendiculaire.

De chacun des trois points A, B, C, abaissez des perpendiculaires sur O N et O P.

Dans le même angle N O V, mais plus près de O N et de O V, placez un point D, et menez D A, D B et D C. De ce même point D, menez la perpendiculaire D d sur O N et D p sur O V; prolongez p D par en haut jusqu'à son intersection avec les trois distances de A, B, C à la méridienne, marquez ces intersections par les lettres $u\,r\,s$, en commençant par en haut.

D est le lieu dont on demande la position, c'est-à-dire qu'il faut déterminer $M = Dd$ et $P = Dp = dO$. Soit $Au = y$ et $Du = x$, le triangle A D u donne

$$y = x \operatorname{tang} ADu = -x \operatorname{tang} ADp = -x \operatorname{tang} \varphi.$$

Le triangle B D r donne

$$Br = y + M'' - M' = Dr \operatorname{tang} BDr = (x + P'' - P') \operatorname{tang}(180 - \varphi + A)$$
$$= -(x + P'' - P') \operatorname{tang} (\varphi - A).$$

Le triangle C D s donne pareillement

$$y + M''' - M' = -(x + P''' - P') \operatorname{tang} (\varphi - B).$$

On a donc

$$y = -x \operatorname{tang}(\varphi - A) - (P'' - P') \operatorname{tang}(\varphi - A) - (M'' - M') = -x \operatorname{tg} \varphi$$
$$y = -x \operatorname{tang}(\varphi - B) - (P''' - P') \operatorname{tang}(\varphi - B) - (M''' - M') = -x \operatorname{tg} \varphi;$$

d'où

$$x\,[\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}(\varphi - A)] = (P'' - P')\operatorname{tang}(\varphi - A) + (M'' - M'),$$

et

$$x\,[\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}(\varphi - B)] = (P''' - P')\operatorname{tang}(\varphi - B) + (M''' - M')$$

$$\frac{x \sin A}{\cos\varphi \cos(\varphi - A)} = (P'' - P')\operatorname{tang}(\varphi - A) + (M'' - M')$$

$$\frac{x \sin B}{\cos\varphi \cos(\varphi - B)} = (P''' - P')\operatorname{tang}(\varphi - B) + (M''' - M');$$

d'où

$$x = \frac{(P'' - P')\cos\varphi \sin(\varphi - A) + (M'' - M')\cos\varphi\cos(\varphi - A)}{\sin A}$$

$$x = \frac{(P''' - P')\cos\varphi \sin(\varphi - B) + (M''' - M')\cos\varphi\cos(\varphi - B)}{\sin B}$$

ou

$$x = (P'' - P')\cos\varphi\sin\varphi\cot A - (P'' - P')\cos\varphi\cos\varphi + (M'' - M')\cos\varphi\cos\varphi\cot A + (M'' - M')\cos\varphi\sin\varphi,$$

$$x = (P''' - P')\cos\varphi\sin\varphi\cot B - (P''' - P')\cos\varphi\cos\varphi + (M''' - M')\cos\varphi\cos\varphi\cot B + (M'' - M')\cos\varphi\sin\varphi.$$

Egalant ces deux valeurs, et divisant par $\cos^2\varphi$,

$$(P'' - P')\cot A \operatorname{tang}\varphi - (P'' - P') + (M'' - M')\cot A + (M'' - M')\operatorname{tang}\varphi$$
$$= (P''' - P')\cot B \operatorname{tg}\varphi - (P''' - P') + (M''' - M')\cot B + (M''' - M')\operatorname{tg}\varphi$$

$$(P'' - P')\cot A \operatorname{tg}\varphi + (M'' - M')\operatorname{tg}\varphi - (P''' - P')\cot B \operatorname{tg}\varphi - (M''' - M')\operatorname{tg}\varphi$$
$$= (M''' - M')\cot B - (P''' - P') - (M'' - M')\cot A + (P'' - P')$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(M''' - M')\cot B - (M'' - M')\cot A - (P''' - P'')}{(P'' - P')\cot A - (P''' - P')\cot B - (M''' - M')}.$$

Quand on aura φ, x et y par ces formules, on en déduira $M = D\,d = A\,a - A\,u = M' - y$ et $P = p\,u - D\,u = P' - x$; on aura enfin

$$D = DA = \frac{D\,u}{\cos AD\,u} = \frac{A\,u}{\sin DA\,u} = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi}$$

$$D' = DB = \frac{D\,r}{\cos BD\,r} = \frac{B\,r}{\sin BD\,r} = \frac{x + (P'' - P')}{\cos(\varphi - A)} = \frac{y + (M'' - M')}{\sin(\varphi - A)}.$$

$$D'' = DC = \frac{x + (P''' - P')}{\cos(\varphi - B)} = \frac{y + (M''' - M')}{\sin(\varphi - B)}.$$

Une solution de ce problême, communiquée par le cit. Prony, m'a donné l'idée de celle qu'on vient de lire.

Cette manière de déterminer la position d'un lieu est un peu plus longue, et demande un calculateur plus exercé que la précédente, qui emploie le triangle formé par les trois objets connus. L'une et l'autre peuvent être très-utiles pour fixer la place des objets secondaires dans un plan topographique. Il n'est besoin d'aucun signal nouveau : quelques observations très-faciles suffiront pour placer tous les points, d'où l'on en découvrira trois autres dont les positions seront connues.

Avant de passer à un autre sujet, je vais donner encore la solution d'un autre problême qui m'a été utile quelquefois, et qui apprend à fixer la position de deux points, d'où l'on apperçoit deux autres points dont la distance est connue. Lagrive a donné la solution de ce problême dans son *Manuel de Trigonométrie;* mais sa méthode n'est pas la plus simple qu'on pût imaginer.

Supposons que l'on connoisse la distance AB (*fig.* 2.), et qu'on veuille déterminer OC, OA, OB, CA et CB sans être obligé d'aller en A ni en B. FIG. 2.

Au point C, mesurez les angles BCA, ACO; au point O, mesurez AOB et BOC.

Soit $\tang x = \frac{AC}{CB}$, on aura

$$\tang \tfrac{1}{2}(ABC - CAB) = \tang(90^\circ - \tfrac{1}{2}ACB)\tang(x - 45^\circ).$$

Mais

$$AC = \frac{CO \sin AOC}{\sin OAC} = \frac{CO \sin(AOB + BOC)}{\sin(AOC + ACO)} = \frac{CO \sin(AOB + BOC)}{\sin(AOB + BOC + ACO)}$$

$$CB = \frac{CO \sin BOC}{\sin OBC} = \frac{CO \sin BOC}{\sin(BOC + BCO)} = \frac{CO \sin BOC}{\sin(BOC + BCA + ACO)};$$

donc

$$\tang x = \frac{AC}{CB} = \frac{\sin(AOB + BOC)\sin(BOC + BCA + ACO)}{\sin(AOB + BOC + ACO)\sin BOC}.$$

Tout est connu dans le second membre; on connoîtra donc $\tang x$; on connoîtra donc tous les angles du triangle ABC, et

à l'aide du côté A B on en déduira BC et AC. Alors dans le triangle BCO, dont on connoît les angles avec le côté BC, on connoîtra CO et BO ; enfin, dans le triangle AOC, on pourra calculer O A et C A.

Ce qui vient de se faire par le triangle BCA, peut s'exécuter de même par le triangle AOB ; on arriveroit à des formules toutes semblables, mais qui emploieroient une autre combinaison d'angles, et qui donneroient une vérification utile de ce qu'on auroit trouvé par les premières.

Pour dispenser le calculateur du soin de faire une figure, soit m la distance connue AB.

a et b les angles pris à la première station en allant de droite à gauche, c'est-à-dire les angles AOB et BOC; c et d les angles pris à la seconde station, toujours en allant de droite à gauche, c'est-à-dire OCA et ACB; D, D', D'', D''' et D^{IV} les cinq distances inconnues, suivant leur ordre de gauche à droite, c'est-à-dire OA, OB, OC, CA et CB.

La double solution sera renfermée dans les formules suivantes:

$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin(c+d)\sin(a+b+c)}{\sin c \sin(b+c+d)}$	$\mathrm{tg}\,x' = \frac{\sin(a+b)\sin(b+c+d)}{\sin b \sin(a+b+c)}$ ..(1)
$\mathrm{tg}\,z = \mathrm{tg}(x-45^\circ)\,\mathrm{tg}(90^\circ-\frac{1}{2}a)$	$\mathrm{tg}\,z' = \mathrm{tg}(x'-45^\circ)\,\mathrm{tg}(90^\circ-\frac{1}{2}d)$ ..(2)
$p = 90^\circ-\frac{1}{2}a+z,\; q = 90^\circ-\frac{1}{2}a-z$	$p' = 90^\circ-\frac{1}{2}d+z',\; q' = 90^\circ-\frac{1}{2}d-z'$.(3)
$\mathrm{D} = \frac{m \sin q}{\sin a}$	$\mathrm{D} = \frac{m \sin(b+c-q')}{\sin a}$ .....(4)
$\mathrm{D}' = \frac{m \sin p}{\sin a}$	$\mathrm{D}' = \frac{m \sin(a+b+c-q')}{\sin a}$ ...(5)
$\mathrm{D}'' = \frac{\mathrm{D}' \sin(b+c+d)}{\sin(c+d)}$	$\mathrm{D}'' = \frac{\mathrm{D} \sin(a+b+c)}{\sin c}$ ......(6)
$\mathrm{D}''' = \frac{\mathrm{D} \sin(a+b)}{\sin c}$	$\mathrm{D}''' = \frac{m \sin p'}{\sin d}$ ....(7)
$\mathrm{D}^{IV} = \frac{m \sin(a+b+c+p)}{\sin d}$	$\mathrm{D}^{IV} = \frac{m \sin q'}{\sin d}$ ....(8)

Pour essayer ces formules, appliquons-les à l'exemple calculé par Lagrive.

$m = 2625$	$a+b = 115°$	$\frac{1}{2}a = 30°$	$a+b+c = 158°\ 0'$
$a = 60°$	$a+b+c = 158$	$90° - \frac{1}{2}a = 60$	$p = 72\ \ 0\ 27''$
$b = 55$	$b+c = 98$	$\frac{1}{2}d = 28\ 30'$	$a+b+c+p = 230\ \ 0\ 27$
$c = 43$	$c+d = 100$	$90° - \frac{1}{2}d = 61\ 30$	$q' = 50\ \ 0\ 23$
$d = 57$	$b+c+d = 155$		$a+b+c-q' = 107\ 59\ 37$
			$b+c-q' = 47\ 59\ 37$

sin $(c+d)$. . . .	9,99335	sin $(a+b)$. . . .	9,95728
sin $(a+b+c)$. . .	9,57358	sin $(b+c+d)$. .	9,62595
C. sin c.	0,16622	C. sin b.	0,08664
C. sin $(b+c+d)$. .	0,37405	C. sin $(a+b+c)$	0,42642
tang $x = 52°\ 0'\ 2'',5$	0,10720	tang $x' = 51°\ 18'\ 0''$	0,09629
-45		45	
tang $7\ \ 0\ \ 2,5$	9,08919	tang $6\ 18\ \ 0$	9,04297
tang $60\ \ 0\ \ 0$	0,23856	tang $61\ 30$	0,26524
tang $z = 12\ \ 0\ 27,0$	9,32775	tang $z = 11\ 29\ 37$	9,30821
$p = 72\ \ 0\ 27,0$		$p' = 72\ 59\ 37$	
$q = 47\ 59\ 33$		$q' = 50\ \ 0\ 23$	

m. . .	3,41913	m. . .	3,41913
C. sin a. . .	0,06247	sin $(b+c-q')$	9,87103
sin q. . .	9,87102	C. sin a. . .	0,06247
D = 2252,3	3,35262	D = 2252,3	3,35263

m. . .	3,41913	m. . .	3,41913
C. sin a. . .	0,06247	C. sin a. . .	0,06247
sin p. . .	9,97822	sin $(a+b+c-q')$	9,97822
D' = 2882,8	3,45982	D' = 2882,8	3,45982

D'. . .	3,45982	D. . .	3,35263
C. sin $(c+d)$	0,00665	sin $(a+b+c)$. .	9,57358
sin $(b+c+d)$	9,62595	C. sin c. . . .	0,16622
D'' = 1237,1	3,09242	D'' = 1237,2	3,09243

D. . .	3,35262	m. . .	3,41913
C. sin c. . .	0,16622	sin p'. . .	9,98058
sin $(a+b)$. . .	9,95728	C. sin d. . .	0,07641
$D'' = 2993,1$	3,47612	$D''' = 2993,1$	3,47612
m. . .	3,41913	m. . .	3,41913
C. sin d. . :	0,07641	sin q'. . .	9,88429
sin $(a+b+c+p)$	9,88430	C. sin d. . .	0,07641
$D^{IV} = 2397,9$	3,37984	$D^{IV} = 2397,9$	3,37983

Si $x < 45°$, tang $(x - 45°)$ sera une quantité négative, et z changera de signe. Il en est de même pour x' et z'.

Sans chercher de formules particulières, ou pourroit résoudre ainsi ce problême.

Supposez $CO = 1$. Alors, dans le triangle CAO, vous aurez les trois angles et un côté; vous calculerez AO et CA, que vous aurez en parties de CO. Dans le triangle OBC, vous connoîtrez aussi les trois angles et un côté. Vous chercherez BC. Alors, dans le triangle BCA, vous aurez les deux côtés CB et CA avec l'angle compris C; vous calculerez le côté AB, que vous aurez par-là en parties de CO. Alors vous ferez cette analogie :

La valeur calculée de AB : la valeur véritable de AB :: la valeur calculée d'un côté quelconque est à sa valeur véritable; ce qui revient à ceci.

Faites

$\log u = \log$ (valeur véritable de AB) — $\log$ (valeur calculée de AB).

Ajoutez log. u au logarithme de chacun des côtés trouvés par le calcul hypothétique, et vous aurez les logarithmes des véritables valeurs.

Les exemples donnés jusqu'ici ont dû familiariser le calculateur avec l'attention qu'on doit aux signes algébriques de chacun des facteurs qui entrent dans les différens termes d'une formule. Cette règle si simple dispense de toute autre considération, et du soin assez embarrassant de construire des figures à chaque

cas

cas qui peut se présenter. Désormais je serai moins prodigue d'exemples qui n'apprendroient rien qu'on n'ait pu déjà remarquer dans ceux que j'ai déjà donnés.

La formule de la page 43, qui sert à trouver la différence entre une ligne brisée et la ligne droite qui aboutit aux mêmes points, est d'un usage bien facile. Tous les termes en sont essentiellement positifs; ils se déduisent les uns des autres d'une manière très-simple. Quand on a calculé le premier, qui est $(b + c) \times \frac{1}{2} x$, on obtient le second en multipliant le premier par $\frac{1}{4} x$; le troisième est égal au second, multiplié par $+ \frac{3}{6} x = \frac{1}{2} x$; le quatrième est égal au produit du troisième par $\frac{5}{8} x$. Les facteurs suivans seroient $\frac{7}{10} x$, $\frac{9}{12} x$, $\frac{11}{14} x$. En sorte que les numérateurs et les dénominateurs forment deux progressions arithmétiques, dont la différence commune est le nombre 2, et que la différence entre le numérateur et le dénominateur est toujours le nombre 3.

Correction des Distances au Zénith.

La formule qui sert à corriger les distances au zénith observées près du méridien, ne présente aucune difficulté; mais l'application en deviendroit bien fastidieuse, si on vouloit la calculer pour chaque distance observée : car on peut avoir en une seule nuit un grand nombre de ces distances. Il convient donc de faire une table qui fournisse ces réductions toutes calculées pour l'étoile qu'on aura choisie.

L'étoile polaire est celle qui mérite la préférence; elle se voit en tout temps, et pendant une partie de l'hiver on peut observer dans une même nuit les deux passages au méridien, l'un au-dessus et l'autre au-dessous du pôle; en sorte qu'en peu de jours on peut déterminer la latitude d'un lieu à la précision d'une seconde.

Ce sera donc la polaire que nous prendrons pour exemple.

Pour calculer la table de réduction, il faut connoître à-peu-

près la déclinaison de l'étoile, et la hauteur du pôle pour le lieu de l'observation. Une erreur de quelques secondes sur chacun de ces élémens n'est d'aucune considération.

Supposons que la latitude soit	L = 51° 2′ 10″
la déclinaison. .	D = 88 12 50
	D — L = 37 10 40
	D + L = 139 15 0

Le calcul se fera comme il suit.

Passage supérieur.		*Passage inférieur.*	
Log 2.	0,30103		
C. sin 1″. . .	5,31443		
cos D.	8,49372		
cos L.	9,79853		
	3,90771	. . . .	3,90771
C. sin (D — L)	0,21875	C. sin (D + L)	0,18525
log *a*.	— 4,12646	log *a*.	+ 4,09296
2 log *a*.	+ 8,25292	2 log *a*. . . .	— 8,18592
$\frac{1}{2}$.	9,69897	. . . .	9,69897
sin 1″.	4,68557	. . . .	4,68557
cot (D — L). .	0,12008	cot (D + L).	— 0,06467
log *b*.	+ 2,75754	log *b*.	+ 2,63513

Quand on aura ainsi déterminé les logarithmes constans *a* et *b*, tant pour le passage supérieur que pour le passage inférieur, le calcul de la table de réduction s'exécutera par l'addition successive des différences logarithmiques de $\sin^2 \frac{1}{2} P$ pour le premier terme de la formule, et par celle des différences logarithmiques de $\sin^4 \frac{1}{2} P$ pour le second terme. Le

troisième terme est toujours insensible. *Voyez* l'exemple de ces additions à côté de ces deux tables à la fin du Mémoire.

Pour le passage supérieur, le premier terme est négatif et le second positif; mais comme celui-ci est toujours plus foible de beaucoup, la réduction est soustractive.

Pour le passage inférieur, les deux termes sont positifs, et la réduction est additive.

Quand on veut observer une même étoile pendant un mois ou deux, il est bon de faire pour tout cet intervalle un tableau qui donne de dix en dix jours la position apparente de l'étoile, c'est-à-dire son ascension droite au temps, et sa distance au pôle à-peu-près connue, affectées l'une et l'autre de l'aberration et de la nutation.

Avec tous ces secours, le calcul est plus facile et moins sujet à erreur.

Pour exemple de l'opération, je vais choisir une série peu étendue. Les nuages interrompoient de temps à autre les observations, qui, sans cela, se seroient succédées plus rapidement.

La pendule étoit réglée sur le temps sidéral; mais, comme elle étoit ce jour-là en retard d'une minute, elle marquoit au temps du passage au méridien une minute de moins que l'ascension droite de l'étoile. Ainsi, pour connoître les angles horaires par les temps de la pendule, il faut diminuer l'ascension droite de 1′.

POLAIRE. *Passage supérieur*, 21 *frimaire an* 5.

		ANGLES HORAIRES.		RÉDUCTION.
Ascension droite.	0^h 51′ 55″			
La pendule retardoit de	1 0			
Passage au méridien en temps de la pendule.	0 50 55			
Instans des observations.	0 37 49	13′ 6″	—	10″,78
	42 53	8 2		4,06
	45 8	5 47		2,11
	47 8	3 47		0,91
	48 39	2 16		0,32
	50 16	0 39		0,03
	52 33	1 38		0,16
	54 39	3 44		0,88
	56 35	5 40		2,03
	58 55	8 0		4,03
	61 18	10 23		6,77
	63 49	12 54		10,46

Somme. . . . . . . — 42,54
Somme divisée par le nombre des observations — 3,545
Distance moyenne entre les 12 observées. 42 2 1,635

Distance méridienne. 42 1 58,090
Réfraction moyenne. 51,020
Correction de température 3,570
Distance polaire. . . . . . + 1 46 22,31

Distance du pôle au zénith 43 49 14,99
Latitude. 46 10 45,01

Au-dessous du passage de l'étoile au méridien en temps de la pendule, je place tous les instans des différentes observations. La comparaison de tous ces instans avec celui du passage me donne les angles horaires qui forment la colonne suivante. Avec ces angles horaires, je prends dans la table de réduction

les corrections qui composent la dernière colonne. Je fais la somme de toutes ces réductions, qui est — 42″,54. J'en prends le douzième, parce qu'il y a douze observations; je retranche la réduction moyenne 3″,545 de la moyenne entre toutes les distances observées: le reste est la distance, telle qu'elle auroit été observée au méridien, abstraction faite de la réfraction.

J'ajoute ensuite la réfraction moyenne, et la correction pour la température; enfin j'ajoute aussi la distance de l'étoile au pôle: la somme de toutes ces quantités est la distance vraie du pôle au zénith, en supposant exactement connue la déclinaison de l'étoile employée dans les calculs. Le complément à 90° de cette distance, est la latitude cherchée.

Dans un passage inférieur, la réduction est additive et la distance polaire soustractive. A cela près, le procédé est le même entièrement.

Si l'on étoit sûr de la déclinaison, il seroit inutile d'observer l'étoile au-dessus et au-dessous du pôle. L'un des deux suffiroit; mais comme on est rarement bien assuré de cet élément essentiel, il faut le vérifier par la comparaison des deux passages.

Le passage supérieur nous a donné ci-dessus	46° 10′ 45″,01
Supposons que le passage inférieur observé le même jour, ou à peu de distance, ait donné...	46 10 41,03
La différence sera................	3,98
La moitié sera la correction de déclinaison . .	— 1,99

Cette correction de déclinaison est soustractive quand le passage supérieur donne plus que l'inférieur.

Cette même correction, ajoutée à la moindre des deux latitudes, donnera pour la latitude vraie. . . . . . 46° 10′ 43″,02

Remarquez que cette latitude est indépendante de l'erreur qu'on pourroit avoir commise sur la nutation, qui ne change pas sensiblement dans un mois ou deux. Elle pourroit être affectée de l'incertitude qui peut rester sur l'aberration, si l'intervalle des deux passages étoit de deux ou trois mois; mais s'il n'est que de quelques jours, l'erreur est insensible pour la latitude.

La déclinaison peut en être affectée aussi bien que par l'erreur commise sur la nutation ; mais la réfraction est la seule chose qui puisse altérer une latitude déterminée par deux passages de la même étoile, l'un au-dessus, l'autre au-dessous du pôle, si l'intervalle des observations est médiocre.

J'ai supposé la pendule réglée sur les fixes ; c'est le plus commode de beaucoup, toutes les fois que ce sont des étoiles qu'on observe. Si pourtant elle suivoit le temps solaire moyen, après avoir cherché les angles horaires, comme ci-dessus, on les augmenteroit tous, à raison de 10″ par heure ou de 1″ pour 6′. Cette précision sera suffisante.

Calcul des Observations azimuthales.

Pour connoître un azimuth avec quelque précision, il faut multiplier les observations, les répéter plusieurs jours, et comparer, quand on le peut, l'objet terrestre avec le soleil levant et le soleil couchant.

Le temps ou l'angle horaire de l'astre est un des élémens essentiels de ce calcul. Une erreur de 1″ sur le temps vrai produiroit environ 10″ d'erreur sur l'azimuth en France; en multipliant les observations, on divisera, et l'on réduira presque à rien les petites erreurs inévitables, soit dans la distance mesurée, soit sur le temps vrai donné par la pendule.

Il est très-utile aussi d'employer des observations du soir et du matin, afin que le résultat moyen soit indépendant des erreurs produites par celles de la déclinaison de l'astre, de la latitude et de la pendule.

On peut employer dans cette recherche le soleil ou une étoile. Le soleil est plus commode; au reste, le procédé est le même à-peu-près.

Pour abréger le calcul, on fera d'avance un tableau où l'on réunira, pour tout le temps des observations de 10′ en 10′, la distance polaire de l'astre et la réduction des temps de la pendule au temps vrai, si l'on se sert du soleil, et au temps sidéral, si l'on observe une étoile.

Exemple. Le 5 juin 1793, par un milieu entre quatre observations, la distance du centre du soleil et le clocher de Gravelines étoit de 51° 3′ 1″ = D; le milieu entre les quatre instans donnés par la pendule étoit de. . . . . 6h 36′ 13″,875 soir.

La réduction au temps vrai pour ce moment étoit. . . . . — 7 47,628

Temps vrai. 6 28 26,247

ou. . . . . 6h 28′ 26″,14‴8

En prenant la moitié des heures et le quart du reste, on a l'angle horaire. . . . . 3s 7° 6′ 33″,7 = P.

Si l'observation eût été faite le matin, cette quantité 3s 7° 6′ 33″,7 seroit le supplément de l'angle horaire, qui seroit par conséquent 2s 22° 53′ 26″,3 = — P, à moins qu'on ne comptât les angles horaires depuis zéro jusqu'à 360°; alors on auroit P = 8s 22° 53′ 26″,3.

La distance du soleil au pôle étoit 67° 20′ 15″ = C.

La hauteur de l'équateur ou le complément de la hauteur du pôle étoit 39° 10′ 22″ = H.

Et la distance du clocher au zénith, 90° 11′ 40″ = A.

Voici le calcul d'après les formules de la page 57.

cos P — 9,0925930	cos H 9,8894388	sin P. . . . 9,9966482
sin H. . 9,8004841	cos C 9,5358014	sin C. . . . 9,9651031
sin C. . 9,9651031	+ 0,2987034 9,4752402	C. sin B. . . 0,0114425
—0,0721407 8,8581802	— 0,0721407	sin z = 70° 4′ 32″ 9,9731938
cos B.	+ 0,2265627 log 9,3551883	z′ = 49 43 50
B = 76° 54′ 18″,8		z — z′ = 20 20 42
réfr. moy. — 3 58,8 table	C. sin B′. . . 0,0115529	réd. au centr. + 34
correction + 5,7	C. sin A. . . 0,0000025	20 21 16 = azimuth
parallaxe + 8,2	sin R. 9,5093104	de Gravelines.
B′ = 75 50 33,9	sin R′. . . . 9,7266381	
A = 90 11 40	19,2475059	
D = 51 3 1	sin ½ z′ = 24° 51′ 55″ 9,6237519,5	
B′+A+D = 218 5 15	z = 49 43 50	
moitié = 109 2 57,5		
R = 18 50 57,5		
R′ = 32 12 3,5		

Le défaut de cette solution est de ne point indiquer si l'angle Z est aigu ou obtus. Le sinus est le même dans l'une et l'autre supposition ; et si l'on n'a pas de raison prise ailleurs pour se déterminer, z que nous avons fait aigu, et de $70^\circ\ 4'\ 32''$, pourroit tout aussi bien être de $109^\circ\ 55'\ 28''$. On peut, en effet, lui donner cette valeur, et elle sera celle de l'angle MZS, c'est-à-dire l'azimuth du soleil compté du point sud. Dans ce cas, comme le point G est plus au nord, l'angle Z′ sera additif à MZS′, et l'on aura

$$MZG = 109^\circ\ 55'\ 28'' + 49^\circ\ 43'\ 50'' = 159^\circ\ 39'\ 18''.$$

La réduction qui est soustractive de Z′ devra se retrancher de la somme, et l'azimuth compté du sud sera $159^\circ\ 38'\ 44''$.

Il est aisé de lever le doute. L'angle PZS est de 180° à midi, et il va toujours diminuant à mesure que le soleil s'approche du couchant, et l'on peut déterminer l'instant où cet angle est de 90° juste, et cet instant sépare ceux où l'angle est obtus d'avec ceux où il est aigu. Si l'on suppose l'angle

$$PZS = MZS = 90^\circ,$$

on aura

$$\text{tang } PS \cos P = \text{tang } PZ \quad \text{ou} \quad \cos P = \text{tang } H \cot C.$$

On n'a pas même besoin de ce calcul pour notre exemple ; car ZPS étant ici plus grand que 90°, il est nécessaire que PZS soit aigu, comme nous l'avons fait.

Pour ne laisser matière à aucun doute, on peut employer la formule qui est au bas de la page 57, et faire le calcul comme il suit pour avoir sans aucune incertitude l'angle MZS, ou l'azimuth du soleil compté du midi.

cot P. . . . —	9,0959448	— C. sin P —	0,0033518	sin P. .	9,9966482
cos H.	9,8894388	sin H.	9,8004841	sin C. .	9,9651031
—0,0966904	8,9853836	cot C. . . .	9,6206983	C. sin. .	0,0268062
—0,26578730		—0,26578730	9,4245342		
cot Z—0,36247774	log—9,5592813,2		sin B = 76° 54′ 18″,8		9,9885575
Z = 109° 55′ 28″,0.					

On trouve de cette manière les mêmes valeurs que par les autres

autres formules, et l'on n'a plus de doute sur l'espèce de celle de Z, qui est ici compté du midi. Mais si le soleil étoit à quelques minutes de l'horizon, on pourroit douter si B surpasse ou non 90°. Dans ce cas, qui sera fort rare, après avoir déterminé Z par sa cotangente, comme dans ce second calcul, on pourroit calculer B par son cosinus, comme dans le premier. Si le cosinus étoit négatif, B passeroit 90°. Il en est de même pour Z, quand sa cotangente est négative.

Ces règles suffisent pour le soir. Il est facile d'en donner qui servent également pour le matin. Pour cela, comptons les heures d'un midi à l'autre, c'est-à-dire depuis 0^h jusqu'à 24^h, en prenant la moitié des heures pour des signes, et le quart du reste pour des degrés, minutes et secondes, P se trouvera exprimé de manière à ne laisser jamais aucun doute sur Z, compté aussi du midi à l'ouest depuis 0° jusqu'à 360°.

La formule

$$\cot Z = \cot P \cos H - \frac{\sin H \cot C}{\sin P}$$

pour le matin donnera Z dans le troisième quart, si la valeur de cot Z est positive, et Z dans le quatrième quart, si cette valeur est négative.

Pour le soir, Z sera dans le troisième quart, si cot Z est positive, et dans le second, si cot Z est négative.

Dans tous les cas, la formule

$$\cos B = \cos P \sin H \sin C + \cos H \cos C$$

donnera $B > 90°$, si cos B est négatif, et $B < 90°$, si cos B est positif.

Quant à Z', il sera additif à Z, si l'objet terrestre est à droite de l'astre, soustractif s'il est à droite.

Pour la réduction au centre, *voyez* page 56.

Après tous les exemples que nous venons de voir, il suffira d'un petit nombre de remarques sur les formules rassemblées page 83.

Celle qui donne la valeur de δ n'est sujette à aucun changement de signe. J'ai rapporté, page 82, les valeurs que j'ai trouvées

pour R dans trois différentes hypothèses d'applatissement. La nouvelle opération pourra apporter quelques changemens à ces valeurs tirées de l'ancienne mesure. Pour trouver e^2, on se rappellera que $e^2 = 1 - b^2$ (page 68), et que $b = \frac{n}{m}$, n et m étant les deux axes de la terre. Ainsi, dans l'hypothèse de $\frac{1}{230}$ d'applatissement, $e^2 = 1 - \left(\frac{229}{230}\right)^2 = \frac{(230)^2-(229)^2}{(230)^2} = \frac{459}{(230)^2}$; ainsi des autres.

La formule qui donne L′ suppose $L > L'$; ce qui arrivera toutes les fois que $\cos z$ sera positif, ou que z sera entre 270° et 90°. Si, au contraire, z étoit entre 90 et 270°, $\cos z$ deviendroit négatif, et $\delta \cos z$ deviendroit additif à L.

Le petit terme $\frac{1}{2}\,\delta \sin \delta \sin^2 z \tang L$ ne pourroit changer de signe que dans le cas seulement où la latitude L deviendroit australe. Ainsi, dans l'hémisphère boréal, ces deux termes seront de même signe, si $\cos z$ est positif, et de signe différent dans le cas contraire.

Pour avoir la correction d'applatissement, il faut multiplier par $e^2 \cos^2 L$ l'ensemble des deux termes précédens; et la correction est toujours de même signe que la différence de latitude ou que l'ensemble des deux premiers termes.

Dans la formule qui donne z', le terme $-\delta \sin z \tang L'$ deviendroit positif, si $z > 180°$ ou L′ australe. Si ces deux circonstances avoient lieu en même temps, ce terme demeureroit négatif; le terme suivant $-\frac{1}{4}\,\delta \sin \delta \sin 2z$ seroit positif, si $2z$ surpassoit 180°.

Dans la valeur de M′, le terme $\frac{\delta \sin z}{\cos L'}$ ne peut devenir négatif que dans le cas où $z > 180°$.

Si la valeur de M′ est négative, c'est une marque que la longitude M′ est à l'est de celle du point de départ.

Dans la valeur de dP, le seul terme qui demande à être calculé avec précision est le premier ($K \cos \frac{1}{2}\,\delta \cos z$), et il devient négatif quand z est entre 90 et 270°.

Le second terme

$+ \mathrm{K} \cos \frac{1}{2} \delta \cos z \,\mathrm{tang}\, \frac{1}{2} \delta \sin z \,\mathrm{tang}\, \mathrm{Z} \,\mathrm{tang}\, \mathrm{L} = \mathrm{K} \sin \frac{1}{2} \delta \sin^2 z \,\mathrm{tang}\, \mathrm{L}$

est toujours positif dans l'hémisphère boréal, et toujours négatif dans l'hémisphère austral.

Le troisième terme

$-2\mathrm{K} \cos \frac{1}{2} \delta \cos z \sin \frac{1}{2} \delta \,\mathrm{tg}\, \frac{1}{2} \delta \sin^2 z \,\mathrm{tg}^2 \mathrm{L} = -2 \mathrm{K} \sin^2 \frac{1}{2} \delta \cos z \sin^2 z \,\mathrm{tg}^2 \mathrm{L}$

ne peut devenir positif que dans le cas où z est entre 90 et 270°.

Le terme suivant est toujours de même signe que la somme des trois premiers.

Enfin le dernier terme

$- \mathrm{K} \cos \frac{1}{2} \delta \cos z \,\mathrm{tang}\, z \, dz \sin 1'' = - \mathrm{K} \cos \frac{1}{2} \delta \sin z \, dz \sin 1''$

fait voir que l'erreur sur l'arc du méridien est toujonrs de signe contraire à l'erreur dz de l'azimuth, tant que l'azimuth est moindre que de 180°, et de même signe que cette erreur dans le cas contraire.

Les transformations que je viens de faire subir à différens termes de la valeur de $d\mathrm{P}$, paroissent simplifier l'expression; mais elles alongeroient réellement le calcul. J'ai disposé la formule de manière à ce que le facteur ($\mathrm{K} \cos \frac{1}{2} \delta \cos z$) fût commun à tous les termes, et que son logarithme servît pour tous.

Tous ces petits termes n'exigent qu'une connoissance approchée de L et de $\frac{1}{2} \delta$, et on peut se contenter de 4 ou 5 décimales tout au plus dans les logarithmes. Ainsi, dans le cas où l'on ne voudroit calculer que l'arc du méridien sans s'embarrasser de bien connoître les latitudes ni les longitudes, on pourroit se contenter des formules suivantes pour préparer les calculs de $d\mathrm{P}$.

$$\delta = \left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R} \sin 1''}\right)$$

$$\mathrm{L}' = \mathrm{L} - \delta \cos z$$

$$z' = 180° + z - \delta \sin z \,\mathrm{tang}\, \mathrm{L}' - \tfrac{1}{4} \delta \sin \delta \sin 2z;$$

ce qui simplifieroit beaucoup le calcul.

Calcul des Différences de Niveau.

Avant d'entreprendre ce calcul, il faut réduire au sommet du signal toutes les distances au zénith, observées au pied du signal. Pour cela, il faut ajouter à la distance observée la quantité $\frac{dH \sin \Delta}{D \sin 1''}$; cette correction est toujours positive. dH est la partie du signal qui étoit au-dessus de la lunette dans l'observation de distance au zénith; Δ la distance observée et D la distance rectiligne entre l'observateur et le point observé : D est donc le côté d'un triangle.

On a vu, page 104, que l'on pouvoit calculer les différences de niveau, à très-peu près comme si la terre étoit sphérique. On pourra donc employer les formules des pages 93 *et suiv.* Seulement à l'angle C formé au centre de la terre réputée sphérique, et qui seroit dans un rapport constant avec la corde K, on pourra substituer un autre angle $C = \frac{K}{R \sin 1''}(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L)$, et même pour la France $C = \frac{K}{R \sin 1''}(1 + \frac{1}{4} e^2)$.

Le cas le plus simple est celui où l'on auroit les deux distances au zénith δ et δ'. Supposons, par exemple, que d'un point A on ait observé la distance au zénith δ d'un objet B dont on cherche l'élévation au-dessus du point A, et que réciproquement du point B on ait observé la distance au zénith δ' du point A; ces deux distances sont déjà réduites aux sommets des signaux, comme il vient d'être dit.

Soit, par exemple.		$\delta' =$	89° 14′ 24″
		$\delta =$	91 7 52
log K.	4,37950	$\delta' - \delta =$	− 1 53 28
$\log \frac{1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L}{2 R \sin 1''}$	8,49777	$\frac{1}{2}(\delta' - \delta) =$	− 56 44
		$+ \frac{1}{2} C =$	+ 12 34
$\frac{1}{2} C = 12' 34''$	2,87727	$\frac{1}{2}(\delta' - \delta) + \frac{1}{2} C =$	− 44 10

La formule exacte se calculera comme il suit (*voyez* pag. 44):

$$\log K. \ldots\ldots \quad 4{,}37950$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) = \sin -56'\,44'' - 8{,}21754$$
$$\text{compl.}\cos\left(\frac{\delta'-\delta}{2}+\tfrac{1}{2}C\right) = -44'\,10'' + 0{,}00004$$
$$dN = -\overset{m}{395{,}44} \quad -\overline{2{,}59708}$$
$$N = +\ 822{,}06 = \text{hauteur du point A au-dessus de la mer}$$
$$N = +\ \overline{426{,}62} = \text{hauteur du point B.}$$

$\delta'-\delta$ est négatif, et partant $\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$ et dN le sont aussi. Cos $\left(\frac{\delta'-\delta}{2}+\frac{1}{2}C\right)$ est positif, et le sera toujours dans ces calculs, quand même l'arc seroit négatif, comme il l'est ici.

m est le module ou la mesure employée dans mes calculs provisoires; elle diffère peu de la toise du Pérou.

Calculons maintenant la formule approximative.

$$K. \ldots\ldots \quad 4{,}37950$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) - 8{,}21760$$
$$K \tang \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) = -\overset{m}{395{,}46} - \overline{2{,}59710}$$
$$C.\cos \tfrac{1}{2} C = 12'\,34'' \quad 0{,}00000$$
$$\text{premier terme } -\overset{m}{395{,}46} - \overline{2{,}59710}$$
$$\tang \tfrac{1}{2} C + 7{,}56295$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) - 8{,}21760$$
$$+ \quad 0{,}02 \quad \overline{8{,}37765}$$
$$dN = -\ \overline{395{,}44}$$

On voit que les deux formules donnent la même chose, et qu'on auroit pu s'en tenir à K tang $\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$; ce qui eût été plus court, parce qu'on auroit été dispensé de connoître $\frac{1}{2}C$; et cependant j'ai choisi entre Dunkerque et Rodez l'exemple dans lequel le second terme se trouve au *maximum*.

Si l'on n'eût observé que δ, et que δ' eût été inconnu, on eût été obligé de recourir à la formule

$$\frac{K\cos(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r - C)} = \frac{K\cos(\delta + 0{,}08C - 0{,}5C)}{\sin(\delta + 0{,}08C - C)} = \frac{K\cos(\delta - 0{,}42C)}{\sin(\delta - 0{,}92C)}.$$

$C = 25' 8'' = 1508''$

0,42
603,2
30,16

$0{,}42\,C =$ 633,36 $=$ 10′ 33″,4
$\delta =$ 91 7 52
$\delta - 0{,}42\,C =$ 90 57 18,6.... cos...— 8,22194
$-\frac{1}{2}C =$ — 12 34 K..... 4,37950
$\delta - 0{,}92\,C =$ 90 44 44,6 compl. sin + 0,00004
$dN =$ — 399,47 2,60148

dN est par ce calcul plus fort de 4,03 (m); c'est que la réfraction terrestre ce jour-là n'étoit pas de 0,08 C, qui est à-peu-près la quantité moyenne.

Supposons maintenant qu'on n'eût observé que δ'; dans ce cas, d'après la formule approximative, page 97, on feroit le calcul suivant:

$\delta' =$ 89° 14′ 24″
$-(\frac{1}{2} - n)\,C =$ — 10 33,4 K.... 4,37950
— cotang...... 89 3 50,6 — 8,21317
$dN =$ — 391,44 (m) — 2,59267

Ici dN est trop foible de 4,00 (m); ainsi, en prenant le milieu entre les deux calculs, on auroit pour dN la même chose qu'en employant les deux distances.

Dans la supposition où l'on n'auroit observé que δ, on auroit besoin d'en conclure δ' par le calcul, afin de réduire à l'horizon l'angle observé en B dans un plan incliné. On se serviroit alors de la série de la page 95; en voici le calcul :

$dN = -399{,}47^{m}$		$-\ 2{,}60148$
	C.sin 1″. . .	5,31443
	C.log K. . .	5,62050
	Cos $\frac{1}{2}$ C. . .	0,00000
premier terme $= -57'\ 18'',8$		3,53641
	$-\ \frac{1}{2}\ -$	9,69897
	$(dN)^2$. . . .	5,20296
	compl. K^2. .	1,24100
	C.sin 1″. . .	5,31443
	sin C.	7,86397
	$-\quad 0'',2$	9,32133
$\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$ —	57′ 19,0	
$\delta'-\delta = -$	1° 54 38	
$\delta =$	91 7 52	
$\delta' =$	89 13 14	

Cette valeur de δ' diffère un peu de celle qui a été observée; on auroit retrouvé la même que par l'observation, en employant pour dN sa véritable valeur — 395,44 : mais j'ai dû la supposer inconnue. On voit que, dans cet exemple, on se seroit trompé de 1′ 10″ sur la valeur de δ'. Il est vrai que le plus souvent cette erreur seroit insensible sur la réduction à l'horizon.

Réfraction terrestre.

Pour déterminer la constante n de la réfraction terrestre, on emploiera la formule de la page 98.

$\delta =$	$89^\circ\ 14'\ 24''$		
$\delta' =$	$91\quad 7\quad 52$		
$\delta+\delta'-180^\circ =$	$0\quad 22\quad 16$		
$\frac{1}{2}(\delta+\delta'-180^\circ) =$	$0\quad 11\quad 08$		
$\frac{1}{2}C =$	$12\quad 34$		
$\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}(\delta+\delta'-180^\circ) =$	$1\quad 26$	. . . . log.	1,93450
compl. log. $C =$	$25\quad 8$	. . . .	6,82160
	$n = 0{,}057050$	. . . . .	8,75610

n est fort petit dans cet exemple ; ce qui vient peut-être de ce que l'un des deux objets étoit fort élevé par rapport à l'autre, et que le rayon visuel ne rasoit pas la terre de si près.

Inclinaison de l'Horizon de la Mer.

Supposons que du haut d'une tour on ait observé la distance $90^\circ\ 15'\ 14'' = \delta$ entre le zénith et l'horizon de la mer, et qu'on demande l'élévation de la tour au-dessus du niveau de la mer,

$$dN = \tfrac{1}{2}(1+n)^2\,R.\,\text{tang}^2(\delta-90^\circ)$$

$\frac{1}{2}$.	9,69897
$(1{,}08)^2$.	0,06685
$R = 3275200$.	6,51497
$\text{tang}^2\ 15'\ 14''$.	5,29305
$dN = 37{,}4835^{m}$	1,57384

L'élévation cherchée seroit donc de 37,5 modules, qui valent 225 pieds environ. On ne trouve que 220 pieds dans la table du

du cit. Jeaurat, insérée dans l'ouvrage de Callet. Ainsi il paroîtroit que le cit. Jeaurat, ou plutôt Bouguer, a supposé $n = 0{,}07$ environ. En effet, dans cette supposition, on trouve

$$dN = 220\tfrac{1}{4}.$$

De notre formule on tireroit

$$\text{tang}^2(\delta - 90^\circ) = \frac{2\,dN}{(1+n)^2\,R} = \frac{dN}{\frac{1}{2}R\,(1+n)^2},$$

ou $$(\delta - 90^\circ) = \frac{dN^{\frac{1}{2}}\cot 1''}{(1+n)R^{\frac{1}{2}}\sin 45^\circ}.$$

Ainsi au log. constant 2,17404, ajoutez $\frac{1}{2}$ log. dN; vous aurez pour une élévation quelconque dN au-dessus du niveau de la mer, l'inclinaison apparente de l'horizon.

Cette formule seroit exacte, si la terre étoit une sphère du rayon R. Pour la ramener au sphéroïde, il faut la multiplier par $(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{4}} = (1 - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 L)$; mais comme ce facteur diffère peu de l'unité, on pourroit, par un milieu entre les valeurs extrêmes de $\sin^2 L$, employer le logarithme constant 2,17370.

Réfraction astronomique.

Soit $R = 32' 53'',8$, $n = 6$, $nR = 3^\circ 17' 22'',8$.

Si l'on demande la réfraction r pour une distance apparente au zénith quelconque z, 89°, par exemple, par les formules de la page 106, on fera le calcul suivant :

$\sin nR =$	3° 17′ 22″,8....	8,7587906
$\text{tang}\, z =$	89°...........	1,7580785
$\text{tang}\, x =$	73° 4′ 52″,7....	0,5168691
$\text{tang}\, \frac{1}{2} x =$	36° 32′ 26″,4....	9,8698528
$R =$	32 53,8....	3,2953031
$r =$	24 22,7....	3,1651559
$r' =$	44 23,5....	3,4254503

Si on avoit demandé r' réfraction pour $z' = 91° = 180° - z$, on auroit eu $x' = 180° - x$ et $\frac{1}{2}x' = 90° - \frac{1}{2}x$; tang $\frac{1}{2}x' = \cot\frac{1}{2}x$, et le même calcul auroit donné r' en même temps que r; il auroit suffi de retrancher log tang $\frac{1}{2}x$, après l'avoir ajouté

$$r' - r = 20'\ 0'',6 = \tfrac{1}{6}(z' - z) \text{ à très-peu près.}$$

Pour la distance apparente	89°
Nous venons de trouver $r =$	0 24′ 22″,7
Ainsi la distance vraie. . $v =$	89 24. 22,7

log de 0,0662437 . . .	8,8211407	*Voyez* page 109.
tang v.	1,9844588	
tang u = 81° 6′ 27″,5	0,8055995	
tang $\frac{1}{2}u$ = 40° 33′ 14	9,9323247	
log. . . . . . . 1709″,36	5,2328337	
r = 24′ 22″,7	3,1651584	

comme ci-dessus. Ainsi les formules pour la distance vraie ont la même exactitude que celles pour la distance apparente.

Il reste à donner un exemple de la correction due à l'état actuel du baromètre et du thermomètre, en se servant des tables abrégées qu'on trouvera à la suite de ce Mémoire.

Supposons que le baromètre soit à 27^po^ 8^lig.^, et le thermomètre à — 6^d.^

Avec 27^po.^ 8^lig.^ la table Ire me donne $x = -\ 0,0119$

Avec — 6^d.^ la table IIe donne. . . . . $y = +\ 0,0964$

$x + y = +\ 0,0845$

$xy = -\ \ \ 11$

$x + y + xy = +\ 0,0834$

$dr = (x + y + xy)\,r$

Soit r = ...	57″,5
pour 0,08.	4,600
0,003	1725
0,0004 . . .	2300
$r + dr$ =	62″,2955

Problème.

Déterminer si un signal qu'on veut placer en I (*fig.* 19.) sera vu en terre ou dans le ciel, enfin sur quel objet il se projettera quand il sera observé du point L, pied d'un signal déjà placé. FIG. 19.

Il est très-utile de reconnoître d'avance sur quels objets un signal se projettera quand il sera vu des stations environnantes. Autant qu'il sera possible, on évitera qu'il se projette en terre, et sur-tout sur des objets voisins; car alors il seroit éclairé comme eux, et très-difficile à distinguer. Si les objets sont fort éloignés, l'inconvénient est beaucoup moins grave, et souvent presque nul. Si l'on n'a pas le choix de la place, alors il est encore très-important de remarquer la couleur des objets sur lesquels il se projette, afin de donner au signal une couleur opposée qui serve à le distinguer.

Quand le signal se projette dans le ciel, il est souvent utile de le faire noir pour qu'il se distingue mieux d'avec la couleur des nuages. Ainsi je me suis très-bien trouvé d'avoir noirci la pyramide que j'avois placée sur la cheminée de Malvoisine.

Quand le signal se projette sur un objet voisin, il convient de lui donner une couleur très-blanche; c'est ce que j'ai fait pour le signal de Mesnil, qui se projetoit sur un bois. Le signal de Montlhéri, vu de Brie, se projetoit sur la tour; j'ai blanchi le signal et noirci la tour, et le signal se distinguoit très-bien.

Sans la réfraction terrestre, le procédé seroit bien simple.

Placez le cercle en I, dans la position verticale, comme pour prendre une distance au zénith. Amenez les deux lunettes sur zéro, et dirigez-les toutes deux sur le pied L du signal, d'où vous aurez à observer le signal I. Puis la lunette inférieure restant fixée sur L, donnez un mouvement de 180° à la lunette supérieure; alors elle sera dirigée sur le point F, diamétralement opposé au point L. C'est donc sur F que se projettera I, vu de L. Remarquez si F est dans le ciel ou en terre,

sur un objet voisin ou éloigné, noir ou blanc, et tenez-en note pour donner au signal I la couleur la plus convenable.

Faites la même chose pour tous les signaux qui entourent le signal I; car il se pourroit qu'il fallût blanchir une face de ce signal, et en noircir une autre. Et si vous prévoyez qu'il soit plus difficile à appercevoir d'une station que d'une autre, soit à cause de l'éloignement, soit pour toute autre raison, tournez l'une des faces du signal directement vers cette station, pour que l'observation soit moins sujète à erreur.

La réfraction terrestre exige quelques attentions de plus. Après avoir fait l'observation précédente, la lunette inférieure restant toujours dirigée sur L, amenez la supérieure sur le point opposé de l'horizon, soit que ce point soit au-dessous de F, comme en f, soit qu'il soit au-dessus, et notez l'arc parcouru par la lunette depuis le zéro, où elle étoit fixée d'abord.

Si cet arc surpasse 180°, seulement de 3 ou 4′, alors il est presque indubitable que l'objet se projettera dans le ciel.

Si l'arc est de 180° juste, alors il y aura quelque doute; mais on pourra espérer au moins que la pointe du signal sera dans le ciel.

Si l'arc est de quelques minutes au-dessous de 180°, le signal I se projettera sûrement en terre; alors évitez, s'il est possible, qu'il se projette sur un arbre ou autre objet isolé.

Le problême est de savoir si la distance apparente du point I au zénith de L est plus grande ou plus petite que celle du point f de l'horizon.

Soit x l'angle au centre de la terre entre L et I, y l'angle au centre de la terre entre I et f, δ la distance apparente de L au zénith de I, δ' la distance apparente de f au zénith de I; l'arc apparent du vertical entre L et f sera $\delta + \delta'$, et l'arc vrai

$$\delta + r + \delta' + r' = \delta + \delta' + nx + ny = \delta + \delta' + n(x + y).$$

Soit Δ la distance apparente de I au zénith de L, Δ' la distance apparente de f à ce même zénith; la distance vraie de I

sera $\Delta + nx$, et la distance vraie de f sera $\Delta' + n(x+y)$; la différence de ces distances sera donc

$$= \Delta' + nx + ny - \Delta - nx = \Delta' - \Delta + ny.$$

Joignez Lf; l'angle ILf sera la différence vraie des deux distances.
Ainsi

$\Delta' - \Delta =$ différence vraie des deux distances $- ny = ILf - ny$.

Or $FIf = ILf + IfL$ et $ILf = FIf - IfL$,

$$If : IL :: \sin ILf : \sin IfL :: ILf : IfL = \frac{IL.ILf}{If}$$

$$FIf = ILf + \frac{IL.ILf}{If} = \frac{(If+IL)\,ILf}{If} = \frac{(x+y)\,ILf}{y},$$

ou

$$ILf = \left(\frac{y}{x+y}\right) FIf = \left(\frac{y}{x+y}\right)\left(\delta + \delta' + n(x+y) - 180^\circ\right);$$

donc

$$\Delta' - \Delta = \left(\frac{y}{x+y}\right)\left(\delta + \delta' + n(x+y) - 180^\circ\right) - ny$$

$$= \left(\frac{y}{x+y}\right)(\delta + \delta' - 180^\circ) + ny - ny = \left(\frac{y}{x+y}\right)(\delta + \delta' - 180^\circ);$$

donc $\Delta' - \Delta$ sera positif, si $(\delta + \delta') > 180^\circ$; alors le signal sera dans le ciel.

Si $\delta + \delta' = 180^\circ$, le pied du signal I sera à l'horizon, et le signal lui-même sera tout entier dans le ciel.

Si $\delta + \delta' < 180^\circ$, le pied du signal sera en terre, et si $\delta + \delta' < 180^\circ +$ l'angle sous lequel le signal paroîtra du point L, le signal sera en entier en terre.

Ces règles sont les mêmes que si la réfraction n'existoit pas; elles seroient infaillibles, si la réfraction étoit constante.

Si la réfraction n'est pas la même quand l'observateur est en I et en L, alors

$$\Delta' - \Delta = \left(\frac{y}{x+y}\right)(\delta + \delta' - 180^\circ) + \frac{n'(x+y)y}{x+y} - ny$$

$$= \left(\frac{y}{x+y}\right)(\delta + \delta' - 180^\circ) + n'y - ny$$

$$= \left(\frac{y}{x+y}\right)(\delta + \delta' - 180^\circ) + (n' - n)y.$$

n et n' étant pour les deux jours d'observations le rapport de la réfraction à l'angle au centre de la terre. Or n' et n ont pour limites très-probables 0,1 et 0,0; car très-rarement $n = 0{,}1$, et plus rarement encore $n = 0{,}0$, quoique je l'aie trouvé deux ou trois fois négatif; mais alors il étoit très-petit.

$(n' - n)$ a donc pour limites $+ 0{,}1$ et $- 0{,}1$. Ainsi

$$\Delta' - \Delta = \left(\frac{x}{x + y}\right)(\delta + \delta' - 180^\circ) \pm \left(\frac{1}{10}\right) y.$$

x peut être connu; mais il est probable que y ne le sera pas. Soit $y = m x$,

$$\Delta' - \Delta = \frac{x}{(1 + m)\, x} (\delta + \delta' - 180^\circ) \pm \frac{m x}{10}$$
$$= \frac{\delta + \delta' - 180^\circ}{1 + m} \pm \frac{m x}{10}.$$

Si $y < x$, alors $\frac{m x}{10}$ sera une quantité qui ne passera guère 1'; si $y > x$, il sera difficile que m surpasse 4. Soit $m = 4$,

$$\Delta' - \Delta = \frac{\delta + \delta' - 180^\circ}{5} \pm 0{,}4\, x.$$

x ira rarement à 15'; $0{,}4\, x$ aura donc pour *maximum* 6'. Alors, pour que le signal soit dans le ciel, il faudra que l'on ait au moins $\frac{\delta + \delta' - 180^\circ}{5} = 6'$ ou $\delta + \delta' - 180^\circ = 30'$. C'est-là le cas le plus défavorable; mais il n'arrivera peut-être jamais. Dans la pratique, j'ai toujours négligé le terme $(n' - n) y$, et jamais je n'ai trouvé la règle en défaut.

De la meilleure Condition des Signaux.

Le meilleur de tous les signaux, sans contredit, seroit une lampe à réverbère. Le diamètre apparent seroit si petit, qu'on ne pourroit commettre aucune erreur en pointant à l'objet, et son éclat le feroit distinguer de très-loin. Cet avantage seroit diminué par trop d'inconvéniens, et il y a telle circonstance et

tel pays où cela seroit impraticable, sans parler de l'incommodité de n'observer que la nuit, et d'avoir à chaque station un homme chargé d'allumer et de bien diriger le réverbère. Il y a même une espèce d'erreur à laquelle ce signal donneroit lieu, autant et peut-être plus qu'aucun autre ; savoir, les ondulations, qui non-seulement font osciller le lieu apparent autour du lieu véritable, mais qui quelquefois aussi le laissent du même côté pendant une ou deux minutes de temps.

S'il existe une réfraction dans le sens latéral, comme j'ai été tenté parfois de le croire, les lampes y seroient également sujètes, et l'on n'a pour s'en garantir qu'un seul moyen, qui est de multiplier les observations, et de les répéter à des heures et dans des circonstances différentes.

Pour bien voir un signal, il faut qu'il ait une longueur suffisante. Après plusieurs essais, je me suis arrêté à faire cette longueur égale à $\frac{1}{10000}$ de la plus grande distance, et je donnois à la base $\frac{1}{3}$ de la hauteur.

Un arbre isolé est un des objets qui s'apperçoit le mieux, même quand il se projette en terre ; j'en ai vu souvent à de très-grandes distances. Celui de Rieupeiroux, dont la tête n'avoit pas deux mètres, se distinguoit parfaitement bien à la distance de plus de 60000. Mais un arbre est toujours un mauvais signal, parce qu'il est toujours irrégulier ; et je n'en ai employé aucun.

Si un signal ne devoit s'observer que de deux stations, et que les deux rayons visuels qui viendroient y aboutir n'y formassent qu'un angle de 30 à 40°, un signal composé d'une seule face, ou triangulaire, ou rectangulaire alongée, seroit préférable à tout autre. En visant au milieu de la partie visible, on viseroit toujours à l'axe du signal.

J'ai essayé plusieurs fois de composer mes signaux de plusieurs faces rectangulaires, dont chacune fût perpendiculaire à la ligne dirigée à l'une des stations environnantes, et fût la seule visible de cette station ; la disposition de mes triangles s'y est toujours opposée.

J'ai donc été contraint d'adopter par-tout la forme pyrami-

dale carrée. Quand on en voyoit le sommet, il n'y avoit ni erreur, ni réduction à faire; mais quand le sommet étoit invisible, la réduction laissoit quelquefois une petite incertitude. Dans ce cas, il eût été plus avantageux que le signal eût la forme d'un parallélépipède à base carrée; il y auroit eu une réduction à faire toutes les fois que le signal auroit été éclairé obliquement : mais cette réduction auroit été facile et sûre.

Entre tous les objets que j'ai été forcé d'employer, les plus incommodes étoient les flèches trop aiguës. Leur base étoit toujours un octogone, la pointe n'étoit pas toujours visible; et quand elles étoient éclairées obliquement, il étoit impossible de savoir précisément quelle face on observoit. Il n'y a d'autre parti à prendre dans ce cas, que d'attendre que le soleil soit couvert et l'horizon pur. Mais comme on en a rarement le loisir, il faut choisir les momens où le soleil les éclaire en face, c'est-à-dire quand le soleil est au dos de l'observateur, et que l'ombre se dirige vers l'objet qu'on observe. Si l'on ne peut saisir ces momens, il ne reste plus qu'à doubler le nombre des séries d'un même angle, et comparer ensemble les séries correspondantes. J'appelle ainsi celles où le soleil étoit à égale distance à droite et à gauche de l'observateur. En prenant un milieu, on aura exactement l'angle véritable.

On seroit tenté de croire qu'à des distances médiocres, comme huit à dix mille mètres, une simple poutre verticale seroit le plus sûr des signaux : on la verroit dans la lunette comme un fil sur lequel on placeroit les fils du réticule, qui y feroient de part et d'autre des angles de 45°. Cette disposition paroît la plus favorable pour observer exactement, et cependant j'ai trouvé dans ce cas, qui m'est arrivé trois fois, que les séries d'un même angle avoient une marche moins régulière qu'à l'ordinaire : la cause, je l'ignore. Les signaux qui donnoient plus d'accord entre tous les angles d'une même série, étoient les pyramides carrées qui terminent certains clochers; et c'est d'après cette expérience que j'ai donné à tous les signaux que j'ai construits une forme à-peu-près semblable.

TABLES

TABLES

POUR

RÉDUIRE LES ANGLES D'UN PLAN

A UN AUTRE PLAN.

TABLE I.

Argumens $(H \pm h)$, $(P \pm Q)$.

Pour réduire à l'horizon un angle observé dans un plan incliné, prenez dans cette Table un nombre avec l'argument (H + h), *et puis un second nombre avec l'argument* (H — h).

Pour réduire l'angle horizontal ou sphérique à l'angle des cordes, prenez dans la même Table, un premier nombre avec l'argument (P + Q), *et un second nombre avec l'argument* (P — Q).

M.	0°.	1°.	2°.	3°.	4°.
1	0,000	0,787	3,097	6,928	12,281
2	0,001	0,813	3,148	7,005	12,383
3	0,002	0,839	3,200	7,082	12,486
4	0,003	0,866	3,252	7,160	12,589
5	0,005	0,893	3,305	7,237	12,692
6	0,007	0,921	3,358	7,316	12,796
7	0,010	0,949	3,411	7,395	12,900
8	0,013	0,978	3,465	7,475	13,005
9	0,017	1,007	3,520	7,554	13,110
10	0,021	1,036	3,575	7,634	13,215
11	0,026	1,066	3,630	7,715	13,321
12	0,030	1,096	3,685	7,796	13,428
13	0,036	1,127	3,741	7,877	13,534
14	0,041	1,158	3,798	7,959	13,641
15	0,047	1,190	3,855	8,041	13,749
16	0,054	1,222	3,912	8,124	13,857
17	0,061	1,254	3,970	8,207	13,965
18	0,068	1,287	4,028	8,291	14,074
19	0,076	1,320	4,086	8,375	14,184
20	0,084	1,354	4,145	8,459	14,293
21	0,093	1,388	4,205	8,544	14,403
22	0,102	1,422	4,265	8,629	14,514
23	0,112	1,457	4,325	8,715	14,625
24	0,122	1,492	4,386	8,801	14,736
25	0,132	1,528	4,447	8,887	14,848

TABLE I. Argumens $(H \pm h)$, $(P \pm Q)$.

M.	0°.	1°.	2°.	3°.	4°.
26	0,143	1,564	4,508	8,974	14,960
27	0,154	1,601	4,570	9,061	15,073
28	0,166	1,638	4,633	9,149	15,186
29	0,178	1,675	4,695	9,237	15,300
30	0,190	1,713	4,759	9,326	15,413
31	0,203	1,751	4,822	9,415	15,528
32	0,217	1,790	4,886	9,504	15,642
33	0,230	1,829	4,951	9,594	15,757
34	0,244	1,869	5,016	9,684	15,873
35	0,259	1,909	5,081	9,775	15,989
36	0,274	1,949	5,147	9,866	16,105
37	0,289	1,990	5,213	9,958	16,222
38	0,305	2,031	5,280	10,050	16,340
39	0,321	2,073	5,347	10,142	16,457
40	0,338	2,115	5,414	10,235	16,575
41	0,355	2,158	5,482	10,328	16,694
42	0,373	2,200	5,550	10,422	16,813
43	0.391	2,244	5,619	10,516	16,932
44	0,409	2,288	5,688	10,610	17,052
45	0,428	2,332	5,758	10,705	17,172
46	0,446	2,376	5,828	10,800	17,293
47	0,467	2,421	5,899	10,896	17,414
48	0,487	2,467	5,970	10,992	17,535
49	0,508	2,513	6,041	11,089	17,657
50	0,529	2,559	6,112	11,186	17,780
51	0,550	2,606	6,184	11,283	17 903
52	0,572	2,653	6,257	11,381	18,026
53	0,594	2,701	6,330	11,480	18,150
54	0,617	2,749	6,403	11,578	18,274
55	0,640	2,797	6,477	11,677	18,398
56	0,663	2,846	6,551	11,777	18,523
57	0,687	2,895	6,626	11,877	18,648
58	0,711	2,945	6,701	11,977	18,774
59	0,736	2,995	6.776	12,078	18,900
60	0,761	3,046	6,852	12,179	19,026

T A B L E I I.

Argument, Angle à réduire.

Pour réduire à l'horizon, le nombre Tangente est positif et le nombre Cotangente négatif; c'est le contraire pour l'angle des cordes.

Angle. D.M.	Tang.	Cotang.		Angle. D.M.	Tang.	Cotang.	
	″	″			″	″	
0 0	0,00	∞	180 0	4, 0	0,72	590,68	176 0
10	0,03	14181, 5	50	10	0,75	567,02	50
20	0,06	7090, 8	40	20	0,78	545,19	40
30	0,09	4727, 2	30	30	0,81	524,98	30
40	0,12	3545, 4	20	40	0,84	506,21	20
50	0,15	2836, 3	10	50	0,87	488,74	10
1 0	0,18	2363, 3	179 0	5 0	0,90	472,44	175 0
10	0,21	2025, 9	50	10	0,93	457,57	50
20	0,24	1772, 6	40	20	0,96	442,86	40
30	0,27	1575, 7	30	30	0,99	429,42	30
40	0,30	1418, 1	20	40	1,02	416,77	20
50	0,33	1289, 1	10	50	1,05	404,84	10
2 0	0,36	1181, 7	178 0	6 0	1,08	393,58	174 0
10	0,39	1090,80	50	10	1,11	382,92	50
20	0,42	1012,80	40	20	1,14	372,83	40
30	0,45	945,30	30	30	1,17	363,24	30
40	0,48	886,20	20	40	1,20	354.14	20
50	0,51	834,05	10	50	1,23	345,49	10
3 0	0,54	787,70	177 0	7 0	1,26	337.24	173 0
10	0,57	746,22	50	10	1,29	329,38	50
20	0,60	708,89	40	20	1,32	321,87	40
30	0,63	675,11	30	30	1,35	314,70	30
40	0,66	644,40	20	40	1,38	307,84	20
50	0,69	616,37	10	50	1,41	301,27	10
4 0	0,72	590,68	176 0	8 0	1,44	294,98	172 0
	CoTang.	Tang.	D.M. Angle.		CoTang.	Tang.	D.M. Angle.

Table II. Argument, Angle à réduire.

Angle. D. M.	Tang.	Cotang.		Angle. D. M.	Tang.	Cotang.	
	″	″			″	″	
8 0	1,44	294,98	172 0	14 0	2,53	167,99	166 0
10	1,47	288,93	50	10	2,56	165,99	50
20	1,50	283,14	40	20	2,60	164,04	40
30	1,53	277,56	30	30	2,63	162,14	30
40	1,56	272,20	20	40	2,66	160,27	20
50	1,59	267,05	10	50	2,69	158,45	10
9 0	1,62	262,09	171 0	15 0	2,72	156,68	165 0
10	1,65	257,30	50	10	2,75	154,93	50
20	1,68	252,68	40	20	2,78	153,23	40
30	1,71	248,23	30	30	2,81	151,56	30
40	1,74	243,93	20	40	2,84	149,93	20
50	1,77	239,78	10	50	2,87	148,33	10
10 0	1,80	235,77	170 0	16 0	2,90	146,77	164 0
10	1,83	231,88	50	10	2,93	145,23	50
20	1,86	228,12	40	20	2,96	143,72	40
30	1,90	224,47	30	30	2,99	142,26	30
40	1,93	220,95	20	40	3,02	140,82	20
50	1,96	217,52	10	50	3,05	139,40	10
11 0	1,99	214,22	169 0	17 0	3,08	138,02	163 0
10	2,02	211,00	50	10	3,11	136,66	50
20	2,05	207,87	40	20	3,14	135,32	40
30	2,08	204,84	30	30	3,18	134,01	30
40	2,11	201,90	20	40	3,21	132,73	20
50	2,14	199,03	10	50	3,24	131,47	10
12 0	2,17	196,25	168 0	18 0	3,27	130,23	162 0
10	2,20	193,54	50	10	3,30	129,02	50
20	2,23	190,90	40	20	3,33	127,82	40
30	2,26	188,34	30	30	3,36	126,65	30
40	2,29	185,84	20	40	3,39	125,50	20
50	2,32	183,40	10	50	3,42	124,37	10
13 0	2,35	181,04	167 0	19 0	3,45	123,26	161 0
10	2,38	178,72	50	10	3,48	122,17	50
20	2,41	176,37	40	20	3,51	121,09	40
30	2,44	174,27	30	30	3,55	120,04	30
40	2,47	172,12	20	40	3,58	119,00	20
50	2,50	170,03	10	50	3,61	117,98	10
14 0	2,53	167,99	166 0	20 0	3,64	116,98	160 0
	Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.

TABLE II. Argument, Angle à réduire.

Angle. D.M.	Tang.	Cotang.		Angle. D.M.	Tang.	Cotang.	
20 0	3″,64	116″,98	160 0	26 0	4″.76	89″,35	154 0
10	3,67	115,99	50	10	4,79	88,75	50
20	3,70	115,02	40	20	4,82	88,17	40
30	3,73	114,07	30	30	4,86	87,60	30
40	3,76	113,13	20	40	4,89	87,03	20
50	3,79	112,20	10	50	4,92	86,58	10
21 0	3,82	111,29	159 0	27 0	4,95	85,92	153 0
10	3,85	110,39	50	10	4,98	85,37	50
20	3,88	109,51	40	20	5,02	84,83	40
30	3,92	108,64	30	30	5,05	84,30	30
40	3,95	107,79	20	40	5,08	83,77	20
50	3,98	106,94	10	50	5,11	83,25	10
22 0	4,01	106,11	158 0	28 0	5,14	82,74	152 0
10	4,04	105,30	50	10	5,17	82,22	50
20	4,07	104,49	40	20	5,21	81,71	40
30	4,11	103,70	30	30	5,24	81,12	30
40	4,14	102,91	20	40	5,27	80,73	20
50	4,17	102,14	10	50	5,30	80,24	10
23 0	4.20	101,38	157 0	29 0	5,33	79,76	151 0
10	4,23	100,63	50	10	5,36	79,28	50
20	4,26	99,89	40	20	5,40	78,81	40
30	4,29	99,17	30	30	5,43	78,34	30
40	4.32	98,44	20	40	5,46	77,89	20
50	4,35	97,74	10	50	5,49	77,43	10
24 0	4 38	97,04	156 0	30 0	5,53	76,98	150 0
10	4,41	96,35	50	10	5,56	76,53	50
20	4,45	95,67	40	20	5,59	76,09	40
30	4,48	95.00	30	30	5,62	75,66	30
40	4,51	94.34	20	40	5,66	75,23	20
50	4,54	93,68	10	50	5,69	74,70	10
25 0	4.57	93,04	155 0	31 0	5.72	74,38	149 0
10	4.60	92,40	50	10	5,75	73,96	50
20	4,63	91,77	40	20	5,78	73,55	40
30	4,67	91,16	30	30	5,82	73,14	30
40	4,70	90,54	20	40	5,85	72,73	20
50	4,73	89,94	10	50	5,88	72,33	10
26 0	4,76	89.35	154 0	32 0	5,91	71,93	148 0
	Cot.	Tang.	D.M. Angle.		Cot.	Tang.	D.M. Angle.

TABLE II. Argument, Angle à réduire.

Angle. D.M.	Tang.	Cotang.		Angle. D.M.	Tang.	Cotang.	
	″	″			″	″	
32 0	5,91	71,93	148 0	38 0	7,10	59,90	142 0
10	5,94	71,54	50	10	7,13	59,62	50
20	5,98	71,15	40	20	7,17	59,34	40
30	6,01	70,77	30	30	7,21	59,06	30
40	6,04	70,39	20	40	7,24	58,79	20
50	6,07	70,01	10	50	7,27	58,52	10
33 0	6,11	69,63	147 0	39 0	7,30	58,25	141 0
10	6,14	69,26	50	10	7,33	57,98	50
20	6,18	68,90	40	20	7,37	57,71	40
30	6,21	68,54	30	30	7,40	57,45	30
40	6,24	68,16	20	40	7,44	57,19	20
50	6,27	67,82	10	50	7,47	56,93	10
34 0	6,31	67,47	146 0	40 0	7,51	56,67	140 0
10	6,34	67,12	50	10	7,54	56,42	50
20	6,37	66,77	40	20	7,57	56,17	40
30	6,41	66,43	30	30	7,61	55,92	30
40	6,44	66,09	20	40	7,64	55,67	20
50	6,47	65,95	10	50	7,68	55,42	10
35 0	6,50	65,42	145 0	41 0	7,71	55,17	139 0
10	6,54	65,09	50	10	7,74	54,93	50
20	6,57	64,76	40	20	7,78	54,69	40
30	6,60	64,42	30	30	7,81	54,45	30
40	6,64	64,12	20	40	7,85	54,21	20
50	6,67	63,80	10	50	7,88	53,97	10
36 0	6,70	63,48	144 0	42 0	7,92	53,73	138 0
10	6,73	63,17	50	10	7,95	53,50	50
20	6,77	62,86	40	20	7,98	53,27	40
30	6,80	62,55	30	30	8,02	53,04	30
40	6,84	62,25	20	40	8,05	52,81	20
50	6,87	61,95	10	50	8,08	52,58	10
37 0	6,90	61,65	143 0	43 0	8,12	52,36	137 0
10	6,93	61,35	50	10	8,15	52,14	50
20	9,97	61,06	40	20	8,19	51,92	40
30	7,01	60,77	30	30	8,22	51,70	30
40	7,04	60,48	20	40	8,26	51,48	20
50	7,07	60,19	10	50	8,29	51,26	10
38 0	7,10	59,90	142 0	44 0	8,33	51,05	136 0
	Cot.	Tang.	D.M. Angle.		Cot.	Tang.	D.M. Angle.

TABLE II. Argument, Angle à réduire.

Angle. D. M.	Tang.	Cotang.		Angle. D. M.	Tang.	Cotang.	
	″	″			″	″	
44 0	8,33	51,05	136 0	50 0	9,62	44,23	130 0
10	8,36	50,84	50	10	9,65	44,06	50
20	8,40	50,63	40	20	9,69	43,90	40
30	8,43	50,42	30	30	9,73	43,73	30
40	8,47	50,21	20	40	9,76	43,57	20
50	8,50	50,00	10	50	9,80	43,40	10
45 0	8,54	49,80	135 0	51 0	9,84	43,24	129 0
10	8,57	49,59	50	10	9,87	43,08	50
20	8,61	49,39	40	20	9,91	42,92	40
30	8,65	49,19	30	30	9,95	42,76	30
40	8,68	48,99	20	40	9,98	42,60	20
50	8,72	48,79	10	50	10,02	42,44	10
46 0	8,76	48,59	134 0	52 0	10,06	42,29	128 0
10	8,79	48,39	50	10	10,09	42,13	50
20	8,83	48,20	40	20	10,13	41,98	40
30	8,87	48,01	30	30	10,17	41,82	30
40	8,90	47,82	20	40	10,20	41,67	20
50	8,94	47,63	10	50	10,24	41,52	10
47 0	8,97	47,44	133 0	53 0	10,28	41,37	127 0
10	9,00	47,25	50	10	10,31	41,22	50
20	9,04	47,06	40	20	10,35	41,07	40
30	9,07	46,88	30	30	10,39	40,92	30
40	9,11	46,69	20	40	10,43	40,77	20
50	9,14	46,51	10	50	10,47	40,62	10
48 0	9,18	46,33	132 0	54 0	10,51	40,48	126 0
10	9,21	46,15	50	10	10,54	40,33	50
20	9,25	45,97	40	20	10,58	40,19	40
30	9,29	45,79	30	30	10,62	40,04	30
40	9,32	45,61	20	40	10,66	39,90	20
50	9,36	45,43	10	50	10,70	39,76	10
49 0	9,40	45,26	131 0	55 0	10,74	39,62	125 0
10	9,43	45,08	50	10	10,77	39,48	50
20	9,47	44,91	40	20	10,81	39,34	40
30	9,51	44,74	30	30	10,85	39,20	30
40	9,54	44,57	20	40	10,89	39,06	20
50	9,58	44,40	10	50	10,93	38,92	10
50 0	9,62	44,23	130 0	56 0	10,97	38,79	124 0
	Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.

TABLE II. Argument, Angle à réduire.

Angle. D.M.	Tang.	Cotang.		Angle. D.M.	Tang.	Cotang.	
	″	″			″	″	
56 0	10,97	38,79	124 0	62 0	12,39	34,33	118 0
10	11,00	38,65	50	10	12,43	34,21	50
20	11,04	38,52	40	20	12,47	34,10	40
30	11,08	38,39	30	30	12,51	33,99	30
40	11,12	38,25	20	40	12,56	33,88	20
50	11,16	38,12	10	50	12,60	33,77	10
57 0	11,20	37,99	123 0	63 0	12,64	33,66	117 0
10	11,23	37,86	50	10	12,68	33,55	50
20	11,27	37,73	40	20	12,72	33,44	40
30	11,31	37,60	30	30	12,76	33,33	30
40	11,35	37,47	20	40	12,80	33,22	20
50	11,39	37,34	10	50	12,84	33,11	10
58 0	11,43	37,21	122 0	64 0	12,89	33,01	116 0
10	11,47	37,08	50	10	12,93	32,90	50
20	11,51	36,96	40	20	12,97	32,80	40
30	11,55	36,83	30	30	13,01	32,69	30
40	11,59	36,71	20	40	13,05	32,58	20
50	11,63	36,58	10	50	13,09	32,48	10
59 0	11,67	36,46	121 0	65 0	13,14	32,38	115 0
10	11,71	36,33	50	10	13,18	32,28	50
20	11,75	36,21	40	20	13,22	32,17	40
30	11,79	36,09	30	30	13,26	32,07	30
40	11,83	35,97	20	40	13,30	31,97	20
50	11,87	35,85	10	50	13,34	31,87	10
60 0	11,91	35,73	120 0	66 0	13,39	31,76	114 0
10	11,95	35,61	50	10	13,43	31,66	50
20	11,99	35,49	40	20	13,47	31,56	40
30	12,03	35,37	30	30	13,52	31,46	30
40	12,07	35,25	20	40	13,56	31,36	20
50	12,11	35,13	10	50	13,60	31,26	10
61 0	12,15	35,02	119 0	67 0	13,65	31,16	113 0
10	12,19	34,90	50	10	13,69	31,06	50
20	12,23	34,79	40	20	13,73	30,96	40
30	12,27	34,67	30	30	13,78	30,87	30
40	12,31	34,56	20	40	13,82	30,77	20
50	12,35	34,44	10	50	13,86	30,67	10
62 0	12,39	34,33	118 0	68 0	13,91	30,58	112 0
	Cot.	Tang.	D.M. Angle.		Cot.	Tang.	D.M. Angle.

TABLE II. Argument, Angle à réduire.

Angle. D.M.	Tang.	Cotang.		Angle. D.M.	Tang.	Cotang.	
	″	″			″	″	
68 0	13,91	30,58	112 0	74 0	15,54	27,37	106 0
10	13,95	30,48	50	10	15,58	27,28	50
20	13,99	30,39	40	20	15,63	27,20	40
30	14,04	30,29	30	30	15,68	27,12	30
40	14,08	30,20	20	40	15,73	27,04	20
50	14,12	30,10	10	50	15,78	26,96	10
69 0	14,17	30,01	111 0	75 0	15,83	26,88	105 0
10	14,21	29,91	50	10	15,87	26,80	50
20	14,26	29,82	40	20	15,92	26,72	40
30	14,30	29,73	30	30	15,97	26,64	30
40	14,35	29,64	20	40	16,01	26,56	20
50	14,39	29,55	10	50	16,06	26,48	10
70 0	14,44	29,46	110 0	76 0	16,11	26,40	104 0
10	14,48	29,37	50	10	16,16	25,32	50
20	14,53	29,28	40	20	16,21	26,24	40
30	14,57	29,19	30	30	16,26	26,16	30
40	14,62	29,10	20	40	16,31	26,08	20
50	14,66	29,01	10	50	16,36	26,00	10
71 0	14,71	28,92	109 0	77 0	16,41	25,93	103 0
10	14,75	28,83	50	10	16,45	25,85	50
20	14,80	28,74	40	20	16,50	25,77	40
30	14,85	28,65	30	30	16,55	25,70	30
40	14,89	28,56	20	40	16,60	25,62	20
50	14,94	28,47	10	50	16,55	25,54	10
72 0	14,99	28,39	108 0	78 0	16,70	25,47	102 0
10	15,03	28,30	50	10	16,75	25,39	50
20	15,08	28,21	40	20	16,80	25,32	40
30	15,12	28,13	30	30	16,85	25,24	30
40	15,17	28,04	20	40	16,90	25,17	20
50	15,21	27,95	10	50	16,95	25,09	10
73 0	15,26	27,87	107 0	79 0	17,00	25,02	101 0
10	15,30	27,78	50	10	17,05	24,94	50
20	15,35	27,70	40	20	17,10	24,87	40
30	15,40	27,62	30	30	17,15	24,80	30
40	15,44	27,53	20	40	17,20	24,72	20
50	15,49	27,45	10	50	17,25	24,65	10
74 0	15,54	27,37	106 0	80 0	17,31	24,58	100 0
	Cot.	Tang.	D.M. Angle.		Cot.	Tang.	D.M. Angle.

Table II. Argument, Angle à réduire.

Angle. D. M.	Tang.	Cotang.		Angle. D. M.	Tang.	Cotang.	
	″	″			″	″	
80 0	17,31	24,58	100 0	85 0	18,90	22,50	95 0
10	17,36	24,50	50	10	18,95	22,43	50
20	17,41	24,43	40	20	19,01	22,37	40
30	17,46	24,36	30	30	19,06	22,30	30
40	17,51	24,29	20	40	19,12	22,24	20
50	17,56	24,22	10	50	19,17	22,18	10
81 0	17,62	24,15	99 0	86 0	19.23	22,12	94 0
10	17,67	24,08	50	10	19,28	22,05	50
20	17,72	24,01	40	20	19,34	21,99	40
30	17,77	23,94	30	30	19,40	21,92	30
40	17,82	23,87	20	40	19,45	21,86	20
50	17,87	23,80	10	50	19,51	21,80	10
82 0	17,93	23,73	98 0	87 0	19,56	21:74	93 0
10	17,98	23,66	50	10	19,62	21,67	50
20	18,03	23,59	40	20	19,68	21,61	40
30	18,09	23,52	30	30	19.74	21,54	30
40	18,14	23,45	20	40	19,80	21,48	20
50	18,19	23,38	10	50	19,86	21,42	10
83 0	18,25	23,31	97 0	88 0	19,92	21,36	92 0
10	18,30	23,24	50	10	19,97	21,29	50
20	18,35	23,17	40	20	20,03	21,23	40
30	18,41	23,11	30	30	20,09	21,17	30
40	18,46	23,04	20	40	20,15	21,11	20
50	18,51	22,97	10	50	20,21	21,05	10
84 0	18,57	22,91	96 0	89 0	20,27	20,99	91 0
10	18,62	22,84	50	10	20,33	20,93	50
20	18,68	22,77	40	20	20,39	20,87	40
30	18,73	22,70	30	30	20,45	20,81	30
40	18,79	22,63	20	40	20,51	20,75	20
50	18,84	22,56	10	50	20,57	20,69	10
85 0	18,90	22,50	95 0	90 0	20,63	20,63	90 0
	Cot.	Tang.	D. M. Angle.		Cot.	Tang.	D. M. Angle.

Pour réduire à l'horizon, le nombre Tangente est positif, et le nombre Cotangente négatif. C'est le contraire pour passer de l'Angle horizontal à l'Angle des cordes.

TABLE III.

Produit sec. H sec. h; Argumens H et h.

	3°. 0'	2°. 50'	2°. 40'	2°. 30'	2°. 20'	2°. 10'	2°. 0'	1°. 50'	1°. 40'	1°. 30'
3°. 0	1,0027	1,0026	1,0025	1,0023	1,0022	1,0021	1,0020	1,0018	1,0018	1,0017
2. 50	1,0026	1,0025	1,0023	1,0021	1,0020	1,0019	1,0018	1,0017	1,0016	1,0016
40	1,0025	1,0024	1,0022	1,0020	1,0019	1,0018	1,0017	1,0016	1,0015	1,0014
30	1,0023	1,0022	1,0020	1,0019	1,0018	1,0017	1,0016	1,0015	1,0014	1,0013
20	1,0022	1,0021	1,0019	1,0018	1,0017	1,0015	1,0014	1,0013	1,0013	1,0012
10	1,0021	1,0019	1,0018	1,0017	1,0015	1,0014	1,0013	1,0012	1,0012	1,0011
2. 0	1,0020	1,0018	1,0017	1,0016	1,0014	1,0013	1,0012	1,0011	1,0010	1,0010
1. 50	1,0018	1,0017	1,0016	1,0015	1,0013	1,0012	1,0011	1,0010	1,0009	1,0009
40	1,0018	1,0016	1,0015	1,0014	1,0012	1,0011	1,0010	1,0009	1,0008	1,0008
30	1,0017	1,0016	1,0014	1,0013	1,0012	1,0011	1,0009	1,0009	1,0008	1,0007
20	1,0016	1,0015	1,0014	1,0012	1,0011	1,0010	1,0009	1,0008	1,0007	1,0006
10	1,0016	1,0014	1,0013	1,0012	1,0010	1,0009	1,0008	1,0007	1,0006	1,0006
1. 0	1,0015	1,0014	1,0012	1,0011	1,0010	1,0009	1,0008	1,0007	1,0006	1,0005
0. 50	1,0015	1,0013	1,0012	1,0011	1,0009	1,0008	1,0007	1,0006	1,0005	1,0005
40	1,0015	1,0013	1,0011	1,0011	1,0009	1,0008	1,0007	1,0006	1,0005	1,0004
30	1,0014	1,0013	1,0011	1,0010	1,0009	1,0007	1,0006	1,0006	1,0005	1,0004
20	1,0014	1,0012	1,0011	1,0010	1,0008	1,0007	1,0006	1,0005	1,0004	1,0004
10	1,0014	1,0012	1,0011	1,0010	1,0008	1,0007	1,0006	1,0005	1,0004	1,0003
0. 0	1,0014	1,0012	1,0011	1,0010	1,0008	1,0007	1,0006	1,0005	1,0004	1,0003

SUITE de la Table III.

	1°. 30'	1°. 20'	1°. 10'	1°. 0'	0°. 50'	0°. 40'	0°. 30'	0°. 20'	0°. 10	0°. 0'
3°. 0	1,0017	1,0016	1,0016	1,0015	1,0015	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014
2. 50	1,0016	1,0015	1,0014	1,0014	1,0013	1,0013	1,0013	1,0012	1,0012	1,0012
40	1,0014	1,0013	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012	1,0011	1,0011	1,0011	1,0011
30	1,0013	1,0012	1,0011	1,0011	1,0011	1,0010	1,0010	1,0010	1,0010	1,0010
20	1,0012	1,0011	1,0010	1,0010	1,0009	1,0009	1,0009	1,0009	1,0008	1,0008
10	1,0011	1,0010	1,0009	1,0009	1,0008	1,0008	1,0007	1,0007	1,0007	1,0007
2. 0	1,0010	1,0009	1,0008	1,0008	1,0007	1,0007	1,0006	1,0006	1,0006	1,0006
1. 50	1,0009	1,0008	1,0007	1,0007	1,0006	1,0006	1,0006	1,0005	1,0005	1,0005
40	1,0008	1,0007	1,0006	1,0006	1,0005	1,0005	1,0005	1,0004	1,0004	1,0004
30	1,0007	1,0006	1,0006	1,0005	1,0005	1,0004	1,0004	1,0004	1,0003	1,0003
20	1,0006	1,0005	1,0005	1,0004	1,0004	1,0003	1,0003	1,0003	1,0002	1,0003
10	1,0006	1,0005	1,0004	1,0004	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
1. 0	1,0005	1,0004	1,0004	1,0003	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0001	1,0002
0, 50	1,0005	1,0004	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0001
40	1,0004	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0001	1,0001
30	1,0004	1,0003	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0001	1,0001	1,0000
20	1,0004	1,0003	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0001	1,0001	1,0001	1,0000
10	1,0003	1,0003	1,0002	1,0001	1,0002	1,0002	1,0001	1,0001	1,0000	1,0000
0 0	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002	1,0001	1,0002	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TABLE IV.

Argument *A*, ou Angle observé.

A	—	A	+
°	″	°	″
3	0,458	93	0,001
6	0,230	96	0,003
9	0,153	99	0,004
12	0,114	102	0,005
15	0,090	105	0,007
18	0,075	108	0,008
21	0,063	111	0,009
24	0,054	114	0,011
27	0,048	117	0,012
30	0,042	120	0,014
33	0,037	123	0,016
36	0,033	126	0,018
39	0,030	129	0,020
42	0,027	132	0,022
45	0,024	135	0,024
48	0,022	138	0,027
51	0,020	141	0,030
54	0,018	144	0,033
57	0,016	147	0,037
60	0,014	150	0,042
63	0,012	153	0,048
66	0,011	156	0,054
69	0,009	159	0,063
72	0,008	162	0,075
75	0,006	165	0,091
78	0,005	168	0,114
81	0,004	171	0,153
84	0,003	174	0,231
87	0,001	177	0,467
90	0,000	180	0,000

CETTE Table renferme les deux petits termes $-\frac{1}{2}(n\,\text{sec.}\,H\,\text{sec.}\,h)^2\frac{\text{cc}^2.\,A.}{\text{sin.}\,1''}$ $+\frac{1}{2}(n\text{sec.}H\text{sec.}h)^3\left(\frac{\frac{1}{3}+\text{cot.}\,A}{\text{sin.}\,1''}\right)$ de la formule pour la réduction à l'horizon, voyez page 39.

Elle suppose $n$sec.Hsec.h $=100''$, et l'on voit qu'avec cette valeur ces termes sont encore insensibles, et qu'on peut les négliger presque toujours. Les nombres de cette table croîtroient ou diminueroient dans la raison des quarrés des valeurs de ($n$sec.Hsec.h) ainsi pour $120''$ on les multiplieroit par $\left(\frac{120}{100}\right)^2=(1{,}20)^2$ $=1{,}44$, et en général par $\left(\frac{100+x}{100}\right)^2$. On voit aussi par la comparaison des deux colonnes de la table, que la partie qui dépend du cube est presque nulle.

TABLE

des Réfractions moyennes pour les Distances vraies au zénith.

Dist. vr.	Réfrac.	Diff.	Dist. vr.	Réfrac.	Diff.	Dist. vr.	Réfrac.	Diff.
°	′ ″	″	°	′ ″	″	° ′	′ ″	″
0	0 0,0		45	0 56,6		82 0	6 22,7	
1	1,0	1,0	46	0 58,6	2,0	10	6 30,1	7,4
2	2,0	1,0	47	1 0,7	2,1	20	6 37,8	7,7
3	3,0	1,0	48	1 2,8	2,1	30	6 45,8	8,0
4	4,0	1,0	49	1 5,1	2,3	40	6 54,1	8,3
5	5,0	1,0	50	1 7,4	2,3	50	7 2,7	8,6
6	6,0	1,0	51	1 9,8	2,4	83 0	7 11,7	9,0
7	7,0	1,0	52	1 12,4	2,6	10	7 21,0	9,3
8	8,0	1,0	53	1 15,0	2,6	20	7 30,7	9,7
9	9,0	1,0	54	1 17,8	2,8	30	7 40,8	10,1
10	10,0	1,0	55	1 20,7	2,9	40	7 51,3	10,5
11	11,0	1,0	56	1 23,8	3,1	50	8 2,3	11,0
12	12,0	1,0	57	1 27,0	3,2	84 0	8 13,8	11,5
13	13,1	1,1	58	1 30,4	3,4	10	8 25,7	11,9
14	14,1	1,0	59	1 34,0	3,6	20	8 38,2	12,5
15	15,2	1,1	60	1 37,8	3,8	30	8 51,2	13,0
16	16,2	1,0	61	1 41,8	4,0	40	9 4,9	13,7
17	17,3	1,1	62	1 46,1	4,3	50	9 19,2	14,3
18	18,4	1,1	63	1 50,7	4,6	85 0	9 34,1	14,9
19	19,5	1,1	64	1 55,6	4,9	10	9 49,8	15,7
20	20,6	1,1	65	2 0,8	5,2	20	10 6,3	16,5
21	21,7	1,1	66	2 6,5	5,7	30	10 23,6	17,3
22	22,9	1,2	67	2 12,6	6,1	40	10 41,8	18,2
23	24,0	1,1	68	2 19,1	6,5	50	11 1,0	19,2
24	25,2	1,2	69	2 26,4	7,3	86 0	11 21,2	20,2
25	26,4	1,2	70	2 34,3	7,9	10	11 42,2	21,0
26	27,6	1,2	71	2 43,0	8,7	20	12 4,7	22,5
27	28,9	1,3	72	2 52,5	9,5	30	12 28,3	23,6
28	30,1	1,2	73	3 3,1	10,6	40	12 53,2	24,9
29	31,4	1,3	74	3 15,0	11,9	50	13 19,4	26,2
30	32,7	1,3	75	3 28,2	13,2	87 0	13 47,3	27,9
31	34,0	1,3	76	3 43,3	15,1	10	14 16,7	29,4
32	35,4	1,4	77	4 0,5	17,2	20	14 47,7	31,0
33	36,8	1,4	78	4 [illegible],3	19,8	30	15 20,6	32,9
34	38,2	1,4	79	4 43,3	23,0	40	15 55,4	34,8
35	39,7	1,5	80 0′	5 10,4	27,1	50	16 32,7	37,3
36	41,2	1,5	80 10	5 15,5	5,1	88 0	17 11,2	38,5
37	42,7	1,5	20	5 20,7	5,2	10	17 52,6	41,3
38	44,3	1,6	30	5 26,0	5,3	20	18 36,2	43,6
39	45,9	1,6	40	5 31,5	5,5	30	19 22,0	45,8
40	47,5	1,6	50	5 37,2	5,7	40	20 11,1	49,1
41	49,2	1,7	81 0	5 43,1	5,9	50	[illegible],8	51,7
42	51,0	1,8	10	5 49,1	6,0	89 0	21 [illegible]	34,5
43	52,8	1,8	20	5 55,4	6,3	10	22 [illegible],7	57,4
44	54,7	1,9	30	6 1,9	6,5	20	23 55,3	60,6
45	56,6	1,9	40	6 8,6	6,7	30	24 58,9	63,6
			50	6 15,5	6,9	40	26 5,8	66,9
			82 0	6 22,7	7,2	50	27 15,9	70,1
						90 0	28 29,4	73,5
						10	29 46,2	76,8
						20	31 6,1	79,9
						30	32 29,3	83,2
						40	33 55,8	86,5
						50	35 25,4	89,6
						91 0	36 58,2	92,8

TABLES

De correction pour les Réfractions.

BAROMÈTRE.

— p.	— l.	+ p.	+ l.	x
28	0	28	0	0,0000
27	11		1	0,0030
	10		2	0,0060
	9		3	0,0089
	8		4	0,0119
	7		5	0,0149
	6		6	0,0179
	5		7	0,0208
	4		8	0,0238
	3		9	0,0268
	2		10	0,0298
	1		11	0,0327
27	0	29	0	0,0357
26	11		1	0,0387
	10		2	0,0417
	9		3	0,0446
	8		4	0,0476
	7		5	0,0506
	6		6	0,0536
	5		7	0,0565
	4		8	0,0595
	3		9	0,0625
	2		10	0,0655
	1		11	0,0685
26	0	30	0	0,0714
25	11		1	0,0744
	10		2	0,0774
	9		3	0,0804
	8		4	0,0833
	7		5	0,0863
25	6	30	6	0,0893
—		+		x

THERMOMETRE.

Dég.	y	Diff.
+ 30	— 0,0992	
29	0,0947	45
28	0,0902	45
27	0,0856	46
26	0,0809	47
25	0,0762	47
+ 24	— 0,0715	47
23	0,0668	47
22	0,0619	49
21	0,0570	49
20	0,0521	49
+ 19	— 0,0471	50
18	0,0421	50
17	0,0371	50
16	0,0319	52
15	0,0267	52
+ 14	— 0,0215	52
13	0,0162	53
12	0,0109	53
11	0,0055	54
10	0,0000	55
+ 9	+ 0,0055	55
8	0,0111	56
7	0,0168	57
6	0,0225	57
5	0,0283	58
+ 4	+ 0,0341	58
3	0,0406	59
2	0,0460	60
1	0,0521	61
0	0,0582	61
— 1	+ 0,0644	62
2	0,0706	62
3	0,0770	64
4	0,0834	64
5	0,0899	65
— 6	+ 0,0964	65
7	0,1031	67
8	0,1098	67
9	0,1157	69
10	0,1166	69
— 11	+ 0,1236	70
12	0,1306	70
13	0,7136	70
14	0,1448	72
15	0,1521	73

USAGE DE CES TABLES.

Avec la hauteur du Baromètre prenez dans la première Table un nombre x, auquel vous donnerez le signe — si le Baromètre est au-dessous de 28 pouces 0 lig., et le signe + dans le cas contraire.

Avec la hauteur du Thermomètre, prenez dans la seconde Table un nombre y avec le signe qui le précède.

La fonction $(x+y+xy)$ sera le facteur par lequel il faudra multiplier la réfraction moyenne pour avoir la correction dont cette réfraction a besoin.

Le plus souvent on pourra négliger le produit xy; mais en le formant il faut faire attention aux signes algébriques de x et y.

TABLES

pour faciliter la construction des Tables de réduction au méridien pour les étoiles. *(Table I.)*

Angle horaire de l'étoile en temps.	Diff. log. sin.$^2\frac{1}{2}$ P.	Angle horaire de l'étoile en temps.	Diff. log. sin.$^2\frac{1}{2}$ P.	Angle horaire de l'étoile en temps.	Diff. log. sin.$^2\frac{1}{2}$ P.	Angle horaire de l'étoile en temps.	Diff. log. sin.$^2\frac{1}{2}$ P.	Angle horaire de l'étoile en temps.	Diff. log. sin.$^2\frac{1}{2}$ P.
′ ″		′ ″		′ ″		′ ″		′ ″	
0 0		8 0	1829	16 0	909	24 0	605	32 0	453
10	3,12127	10	1791	10	900	10	601	10	450
20	60206	20	1754	20	890	20	596	20	448
30	35218	30	1720	30	881	30	592	30	446
40	24988	40	1687	40	873	40	589	40	444
50	19382	50	1654	50	854	50	584	50	441
1 0	15836	9 0	1623	17 0	855	25 0	580	33 0	439
10	13390	10	1594	10	847	10	577	10	437
20	11598	20	1565	20	839	20	573	20	435
30	10231	30	1537	30	831	30	569	30	432
40	9151	40	1510	40	823	40	565	40	430
50	8279	50	1485	50	815	50	562	50	429
2 0	7557	10 0	1460	18 0	808	26 0	558	34 0	426
10	6943	10	1435	10	800	10	554	10	424
20	6436	20	1412	20	792	20	551	20	422
30	5993	30	1388	30	786	30	547	30	419
40	5606	40	1369	40	779	40	544	40	418
50	5265	50	1347	50	775	50	541	50	416
3 0	4965	11 0	1326	19 0	765	27 0	537	35 0	414
10	4696	10	1306	10	758	10	534	10	411
20	4455	20	1286	20	752	20	531	20	410
30	4238	30	1268	30	745	30	527	30	408
40	4041	40	1249	40	738	40	524	40	406
50	3861	50	1232	50	732	50	521	50	404
4 0	3696	12 0	1215	20 0	727	28 0	518	36 0	402
10	3535	10	1198	10	720	10	515	10	400
20	3417	20	1181	20	715	20	512	20	399
30	3278	30	1166	30	708	30	508	30	396
40	3158	40	1150	40	703	40	506	40	395
50	3048	50	1135	50	697	50	503	50	393
5 0	2945	13 0	1120	21 0	692	29 0	500	37 0	391
10	2848	10	1107	10	686	10	497	10	390
20	2757	20	1092	20	681	20	494	20	387
30	2673	30	1079	30	675	30	492	30	386
40	2593	40	1065	40	671	40	489	40	385
50	2517	50	1053	50	665	50	486	50	383
6 0	2447	14 0	1040	22 0	660	30 0	483	38 0	381
10	2380	10	1027	10	655	10	480	10	379
20	2316	20	1016	20	650	20	478	20	378
30	2256	30	1004	30	645	30	475	30	376
40	2199	40	992	40	641	40	473	40	374
50	2145	50	981	50	635	50	470	50	372
7 0	2093	15 0	970	23 0	631	31 0	468	39 0	371
10	2043	10	960	10	627	10	465	10	370
20	1997	20	949	20	622	20	462	20	368
30	1952	30	938	30	618	30	460	30	366
40	1909	40	929	40	613	40	458	40	365
50	1867	50	919	50	609	50	455	50	363
8 0	1829	16 0	909	24 0	605	32 0	453	40 0	362

TABLES

pour faciliter la construction des Tables de réduction au méridien pour les étoiles. *(Table II.)*

Angle horaire de l'étoile en temps.	Diff. log. sin. $^4\frac{1}{2}$ P.
° ′	″
0 0	0,00000
1	9,35514
2	1,20412
3	70436
4	49974
5	38764
6	31670
7	26778
8	23194
9	20458
10	18302
11	16554
12	15112
13	13900
14	12872
15	11980
16	11208
17	10526
18	9926
19	9386
20	8706
21	8470
22	8076
23	7714
24	7388
25	7094
26	6808
27	6548
28	6310
29	6088
30	5882
31	5688
32	5506
33	5336
34	5178
35	4026
36	4884
37	4748
38	4624
39	4500
40	4388

On a vu page 154, comment on forme les logarithmes constans *a* et *b* pour les Tables de réduction au méridien, c'est à ces logarithmes constans qu'il faut ajouter les différences logarithmiques de sin. $^2\frac{1}{2}$ P. et sin. $^4\frac{1}{2}$ P. : voici un exemple de ces calculs

	Log. *a*. . . .	4,12646		Log. *b*. . . .	2,75754
	diff. log. pour 10″ . . .	3,12127		Diff. log. pour 1′ . . .	9,35514
0″0018		7,24773	0′0000		2,11268
	20	60206		2 . . .	1,20412
0 0071		7,84979	0 0000		3,31680
	30	35218		3	70436
0 0159		8,20197	0 0000		4,01116
	40	24988		4	49974
0 0284		8,45185	0 0000		4,52090
	50	19382		5	38764
0 0442		8,64567	0 0000		4,90854
1′	0	15836		6	31670
0 0637		8,80403	0 0000		5,22524
1′	10	13390		7	26778
0 0866		8,93793	0 0000		5,49302
1′	20	11598		8	23194
0 1132		9,05391	0 0001		5,72495
1′	30	10231		9	20458
0 1433		9,12622	0 0001		5,92954
		&c.		10	18302
			0 0001		6,11256
					&c.

On a ainsi par des additions successives les logarithmes des deux nombres dont la réunion formera chaque terme de la Table.

Le second terme est si petit que c'est ici, vers 8′ qu'il commence à valoir à-peu-près 0″0001 ; il varie peu dans l'intervalle de 1′ ; on l'étendra aux dixaines de seconde par une interpolation facile.

Pour les signes des deux nombres de chaque terme de la Table voyez pages 49 et 50.

OBSERVATIONS

Sur quelques endroits du Mémoire du cit. DELAMBRE.

Par A. M. LEGENDRE.

I. LE cit. Delambre (*page* 39 de son *Mémoire*) avance que ma formule pour réduire les angles au plan de l'horizon n'est pas suffisamment exacte, puisqu'elle a donné dans un cas extraordinaire une erreur de 12 secondes; je réponds que ma formule est fondée sur la supposition que les angles α et 6 sont très-petits; supposition qui est toujours sensiblement vraie dans une chaîne de triangles telle que celle qui a été tracée entre Dunkerque et Barcelonne. Dans toute cette chaîne, le triangle formé par Puig Camellas, Puig la Stella et Forceral, est celui où l'erreur de ma formule a été la plus grande; et cependant elle n'a été que d'un quart de seconde. Dans les autres cas, l'erreur est restée dans les centièmes de seconde, ou même au-dessous. Au reste, quand on trouve une réduction de plusieurs minutes, cette grandeur indique que la réduction doit être calculée avec plus de précision; et alors la résolution directe du triangle sphérique est préférable à toute autre méthode.

II. Le cit. Delambre (*page* 61) trouve une différence entre sa formule et la mienne; mais j'observe que cette différence vient de ce qu'il a changé sin δ cos z en δ cos z, tandis qu'il devoit mettre $(\delta - \frac{1}{6}\delta^3)$ cos z; et alors les deux formules se seroient accordées parfaitement.

III. La formule

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} C' \operatorname{tang} \frac{1}{2} C'' \sin A}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} C' \operatorname{tang} \frac{1}{2} C'' \cos A},$$

à laquelle parvient le cit. Delambre (*page* 64), est la même que j'ai donnée dans ma *Géométrie*, page 319, et que j'ai tirée éga-

lement du théorême de Neper. Quant à la série élégante que le cit. Delambre en déduit, et qu'il démontre par le moyen du calcul différentiel, j'observe qu'elle peut se trouver plus simplement par la méthode qu'a donnée le cit. Lagrange dans les Mémoires de Berlin, année 1774. D'après cette méthode, on peut résoudre généralement toute équation de la forme

$$\tang y = \varphi\,(\sin A \text{ et } \cos A),$$

dans laquelle le second membre est une fonction rationnelle de sin A et de cos A, et on parviendra toujours à un résultat composé d'une ou de plusieurs séries de la forme

$$l A + m \sin A + \tfrac{1}{2} m^2 \sin 2 A + \tfrac{1}{3} m^3 \sin 3 A + \&c.$$

l étant 1 ou zéro. Dans le cas dont il s'agit, ayant à résoudre l'équation

$$\tang \tfrac{1}{2} x = \frac{K \sin A}{1 + K \cos A},$$

on mettra au lieu de sin A, cos A et tang $\frac{1}{2} x$, leurs valeurs connues en exponentielles imaginaires; ce qui donnera

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}x\sqrt{-1}} + e^{-\frac{1}{2}x\sqrt{-1}}} = \frac{K e^{A\sqrt{-1}} - K e^{-A\sqrt{-1}}}{2 + K e^{A\sqrt{-1}} + K e^{-A\sqrt{-1}}};$$

d'où l'on tire

$$e^{x\sqrt{-1}} = \frac{1 + K e^{A\sqrt{-1}}}{1 + K e^{-A\sqrt{-1}}},$$

et en repassant des nombres aux logarithmes

$$\begin{aligned} x\sqrt{-1} &= \log(1 + K e^{A\sqrt{-1}}) - \log(1 + K e^{-A\sqrt{-1}}) \\ &= K e^{A\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2} K^2 e^{2A\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3} K^3 e^{3A\sqrt{-1}} - \&c. \\ &\quad - K e^{-A\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2} K^2 e^{-2A\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{3} K^3 e^{-3A\sqrt{-1}} + \&c. \end{aligned}$$

donc

$$\tfrac{1}{2} x = K \sin A - \tfrac{1}{2} K^2 \sin 2 A + \tfrac{1}{3} K^3 \sin 3 A - \&c.$$

IV. Le cit. Delambre dit (*page* 85) que ma méthode pour calculer les parties de la méridienne, est sujète à des inconvé-

niens assez graves, celui entr'autres de ne pas offrir toujours des moyens faciles de vérification, sur-tout dans les endroits où ils seroient les plus nécessaires pour empêcher qu'une même erreur n'affectât toute l'opération. Je réponds à cela qu'il me semble au contraire que ma méthode a de l'avantage sur celle du cit. Delambre, par la multitude des moyens de vérification qu'elle présente. J'en ai acquis l'expérience dans le calcul de la méridienne, dont les diverses parties ont toujours été déterminées par différentes combinaisons. Quant à l'exemple apporté par le cit. Delambre, où il s'agit de vérifier le calcul de la partie MO (*fig.* de la *page* 3), j'y ai répondu d'avance, page 5 de mon Mémoire, en disant qu'on peut calculer MO de deux manières, l'une par la résolution des deux triangles DMF, MFO; l'autre par celle des trois triangles RDM, REN, FNO. Voilà la vérification que desire le cit. Delambre; et il suffit qu'il y en ait une : mais on en trouveroit aisément plusieurs autres. Par exemple, en prolongeant le côté OF jusqu'à la rencontre de CD, en un point que j'appellerai C′, on auroit à résoudre les triangles DFC′ et C′MO, lesquels auroient l'avantage d'avoir chacun les angles et un côté connus; de sorte que ce troisième moyen seroit plus simple que les deux déjà indiqués. — Le cit. Delambre objecte encore que dans la suite des triangles qu'on a à résoudre dans ma méthode, il peut se présenter le cas où un très-petit côté serviroit à en déterminer un grand; ce qui pourroit donner lieu à une erreur notable. J'avoue que ce cas peut se rencontrer; mais il y a toujours des moyens d'éviter des intersections trop obliques, et il faut supposer que le calculateur, guidé par une figure, ne choisit pas les cas qui lui seroient le plus désavantageux. Le calcul de la méridienne n'offre nulle part de difficulté en ce genre : on a eu à résoudre quelques triangles, dans lesquels il y avoit de petits angles; mais il n'en est jamais résulté d'erreur sensible.

V. Le cit. Delambre (*pag.* 67 *et* 87) cite comme un des principaux avantages de sa méthode, celui de pouvoir, par

son moyen, déterminer et corriger l'erreur produite sur la longueur de la méridienne par une petite erreur sur la direction du premier côté. Il me semble que la méthode la plus simple pour cet objet, dont je n'ai point parlé dans mon Mémoire, est de faire tourner la chaîne de triangles autour de son premier point, et de calculer la quantité dont le dernier point se sera rapproché ou éloigné du pôle. Soit $p\,a\,b$ (*fig.* 23.) le triangle sphérique formé par le pôle p, le premier point de la chaîne a, dont la latitude est L, et le dernier point b, dont la latitude est L'; si on suppose que $p\,a$ et $a\,b$ demeurant constans, l'angle $p\,a\,b$ augmente de la quantité $d\mathrm{A}$, on trouvera par les formules connues

$$d\,(p\,b\,a) = \frac{\cos \mathrm{L}}{\cos \mathrm{L}'}\, d\,\mathrm{A}\,, \quad d\,(pb) = \frac{\cos \mathrm{L}}{\cos \mathrm{L}'} . y\, d\mathrm{A}.$$

La seconde formule, où y représente la perpendiculaire abaissée du dernier point b sur la méridienne du premier point a, donnera par un seul terme la correction totale qui peut être due à une petite erreur sur l'azimuth primitif.

Je ne prolongerai pas davantage ces observations, peu intéressantes en elles-mêmes, et qui ne diminuent en rien le mérite du Mémoire du cit. Delambre, ni l'exactitude des conclusions auxquelles on parviendra également par des routes fort opposées. J'ajouterai seulement un théorême qui pourra être utile en quelques occasions pour résoudre des triangles sphériques dans lesquels il y auroit deux angles très-petits, les côtés étant d'une grandeur quelconque.

Soient A, B, C *les trois angles d'un triangle sphérique, les deux premiers* A *et* B *étant très-aigus, et le troisième* C *très-obtus; soient* a, b, c *les côtés opposés. Si on construit un triangle rectiligne dont les côtés soient proportionnels aux nombres* A, B, 180° — C, *je dis que les angles opposés seront* a, b, 180° — c; *de sorte que la résolution du triangle sphérique sera ramenée à celle du triangle rectiligne correspondant.*

Par exemple, soit la base de 60°, les angles adjacens 3' et 5'; dans le triangle rectiligne correspondant, on connoîtra les deux côtés 3

et 5, et l'angle compris 120°. De-là résulte le troisième côté $=7$. Donc le troisième angle du triangle sphérique $=180°-7'=179°53'$.

En effet, dans le triangle sphérique proposé, on a

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Si dans cette formule on fait $C = 180° - D$, et qu'on considère que les angles A, B, D sont très-petits, on pourra la changer en celle-ci :

$$\cos c = \frac{-(1-\frac{1}{2}D^2)+(1-\frac{1}{2}A^2)(1-\frac{1}{2}B^2)}{AB} = \frac{D^2-A^2-B^2}{2AB}.$$

Mais dans le triangle rectiligne, dont A, B, D sont les trois côtés, et $180°-c$ l'angle opposé au côté D, on a pareillement $\cos c = \frac{D^2 - A^2 - B^2}{2AB}$. Dans ce même triangle, si a et b sont les deux angles opposés aux côtés A et B, on aura $\sin a : \sin b :: A : B$; ce qui s'accorde avec la proportion $\sin a : \sin b :: \sin A : \sin B$, donnée par le triangle sphérique. Donc en effet la relation entre le triangle rectiligne et le triangle sphérique est telle que l'énoncé du théorême l'établit.

On peut parvenir à la même solution, ou à une solution encore plus approchée, par la voie des triangles appelés *polaires* ou *supplémentaires*. Soit LMN le triangle de cette sorte, dans lequel on a $MN = 180° - A$, $LN = 180° - B$, $ML = 180° - C$: prolongez les arcs NM, NL jusqu'à leur rencontre prochaine en K; vous aurez un nouveau triangle sphérique LKM, dont les côtés seront très-petits; savoir, $KM = A$, $KL = B$, $ML = 180° - C$, et dont les angles sont $L = a$, $M = b$, $K = 180° - c$. Ce triangle pourra être regardé comme rectiligne, et sera alors celui dont il est question dans le théorême précédent. Mais, pour plus d'exactitude, on peut appliquer au triangle LKM le théorême de la page 13, concernant les triangles sphériques, dont les côtés sont très-petits; d'où l'on voit que ce théorême acquiert une nouvelle extension, en donnant le moyen de résoudre avec une très-grande approximation tout triangle sphérique dans lequel il y a deux angles très-aigus.

FIN.

ABRÉGÉ DU CATALOGUE

Des livres de fonds et d'assortiment de J. B. M. DUPRAT, *Libraire pour les Mathématiques, à Paris, quai des Augustins.*

ÉLÉMENS d'Algèbre de *Clairaut*, cinquième édition, avec des notes et des additions, tirées en partie des leçons données à l'École normale, par *Lagrange* et *Laplace*, et précédée d'un Traité élémentaire d'Arithmetique, 2 vol. *in*-8. 10 fr.

Elémens de Géométrie, précédés de réflexions sur l'ordre à suivre dans ces élémens, sur la manière de les écrire et sur la méthode en mathématiques, par *S. F. Lacroix*, *in*-8. 4 fr.

Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie, par le même, *in*-8. 4 fr.

Essais de Géométrie sur les Plans et les Surfaces courbes, ou Élémens de Géométrie descriptive, par le même, *in*-8. 2 fr. 5 déc.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, par le même, 2 vol. *in*-4. 33 fr.

Le Traité des Différences et des Séries, *qui sert d'appendice à l'ouvrage précédent, est sous presse.*

Exposition du Système du Monde, par *P. S. Laplace*, 2 vol. *in*-8. 10 fr.

Traité de Mécanique céleste, par le même, 2 vol. *in*-4. *sous presse.*

Essai sur la Théorie des Nombres, par *A. M. Legendre*, *in*-4. 18 fr.

Mémoire sur les Transcendantes elliptiques, par le même, *in*-4. 6 fr.

Dissertation sur une Question de Balistique, couronnée par l'Académie de Berlin, par le même. 3 fr. 5 déc.

Elémens de Géométrie, par le même, *in*-8. 5 fr.

Mécanique analytique, par *J. L. Lagrange*, *in*-4. 13 fr.

Théorie des Fonctions analytiques, par le même, *in*-4. 5 fr.

De la Résolution des Equations numériques de tous les degrés, par le même, *in*-4. 9 fr.

Elémens de Statique, par *G. Monge*, troisième édition, *in*-8. 3 fr.

Géométrie descriptive, leçons données aux Ecoles normales, par le même, *in*-4. 8 fr.

Essai sur les Machines en général, par *Carnot*, *in*-8. 2 fr. 5 déc.

Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal, par le même, *in*-8. 1 fr. 8 d.

Tables portatives de Logarithmes, par *Callet*, reliées. 14 fr.

Leçons élémentaires d'Arithmétique et d'Algèbre, par *P. Tedenat*, associé de l'Institut national, professeur de mathématiques à l'École centrale du département de l'Aveyron, *in*-8. 4 fr.

Leçons élémentaires de Géométrie, par le même, *in*-8. 5 fr.

Traité élémentaire de Mathématiques pures, par *E. M. J. Lemoine* (d'Essoies) troisième édition, 2 vol. *in*-8. 9 fr

Cours de Mathématiques à l'usage de la Marine, par *Bézout*, 6 vol. *in*-8. 24 fr.

Cours de Mathématiques à l'usage de l'Artillerie, par le même, 4 vol. *in*-8. 24 fr.

Théorie générale des Equations algébriques, par le même, *in*-4. 18 fr.

Cours de Mathematiques, par *Ch. Bossut*, 3 vol. *in*-8. 15 fr.

Traité théorique et expérimental d'Hydrodynamique, par le même, 2 vol. *in*-8. 10 fr.

Traités de Calcul différentiel et de Calcul intégral, par le même, 2 vol. *in*-8. 12 fr.

Leçons élémentaires d'Arithmétique, par *Mauduit*, *in*-8. 5 fr.

Leçons de Géométrie théorique et pratique, par le même. 5 fr. 5 déc.

Introduction aux Sections coniques, par le même, *in*-8. 3 fr.

Principes d'Astronomie sphérique, par le même, *in*-8. 5 fr.

Elémens des Sections coniques démontrées par synthèse, par le même, *in*-8. 6 fr.

Hydrographie démontrée et appliquée à toutes les parties du Pilotage, par *Lascale*, *in*-8. 6 fr.

Essai sur les Ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci, avec des fragmens tirés de ses manuscrits apportés de l'Italie, lu à la première classe de l'Institut national, par *J. B. Venturi*, *in*-4. 2 fr. 5 déc.

Traité de Mécanique, par *Marie*, *in*-4. 12 fr.

Nouvelle Architecture hydraulique, par *Prony*, 2 vol. *in*-4. 60 fr.

Exposition d'une Méthode pour construire les Equations indéterminées qui se rapportent aux Sections coniques, par le même, *in*-4. 3 fr. 5 déc.

Astronomie, par *J. Lalande*, 3 vol. *in*-4. 60 fr.

Abrégé d'Astronomie, par le même, *in*-8. 5 fr.

Traité analytique de la Résistance des Solides et des Solides d'égale résistance, par *Girard*, *in*-4. 13 fr.

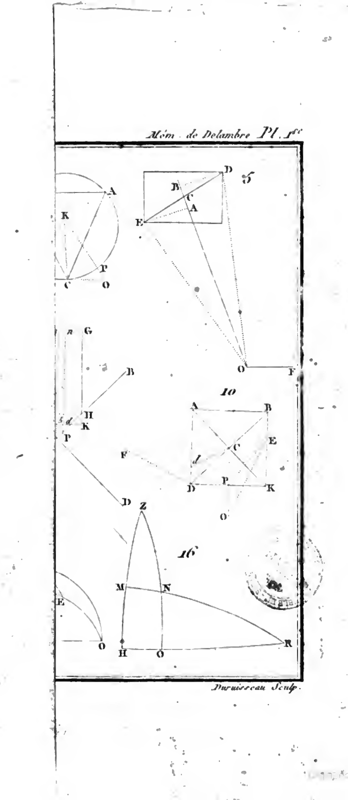
Récréations mathématiques et physiques, par *Ozanam*, nouvelle édition nouvellement refondue par *Montucla*, 4 vol. *in*-8. 20 fr.

Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique, par *Cagnoli*, *in*-4. 15 fr.

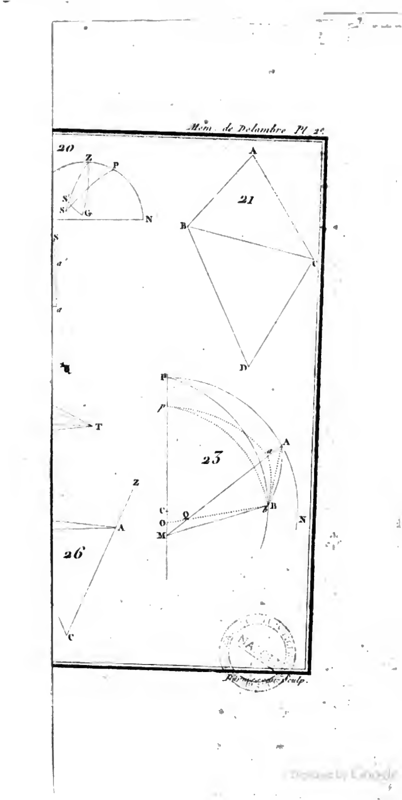
Tables de Jupiter et de Saturne, déduites du principe de la pesanteur universelle, suivant la théorie de *Laplace*, et des meilleures observations faites sur-tout depuis un siècle, par *Delambre*, *in-4*. 6 fr.
Méthodes analytiques employées dans le calcul de la Méridienne de France, par *Legendre* et *Delambre*, *in-4*. 6 fr.
La Méridienne de l'Observatoire de Paris, vérifiée dans toute l'étendue de la France, par *Cassini* et *Lacaille*, *in-4*. 18 fr.
Exposé des Opérations faites en France en 1787 pour la jonction des Observatoires de Paris et de Greenwich, par *Cassini*, *Méchain* et *Legendre*, *in-4*. 9 fr.
Description des Opérations géodésiques faites en Angleterre pour fixer la situation des Observatoires de Greenwich et de Paris, traduite de l'englais par *Prony*, *in-4*. 30 fr.
Voyage astronomique et géographique dans l'état de l'Eglise, pour mesurer deux degrés du méridien, par les *PP. Maire* et *Boscovich*, *in-4*. 12 fr.
La Figure de la Terre déterminée par les Observations faites au cercle polaire, par *Maupertuis*, *in-8*. 6 fr.
La Figure de la Terre déterminée par les Observations de Bouguer et de la Condamine sous l'équateur, par *Bouguer*. 30 fr.
Journal du Voyage à l'Equateur, par *la Condamine*, *in-4*. 9 fr.
Mesure des trois premiers Degrés du Méridien dans l'Hémisphère austral, par le même, *in-4*. 9 fr.
Degré du Méridien entre Paris et Amiens, déterminé par la mesure de M. *Picard*, et par les Observations de MM. de Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemonnier; d'où l'on déduit la figure de la terre par la comparaison de ce degré avec celui qui a été mesuré au cercle polaire, *in-8*. 6 fr.
Dimensio graduum Meridiani Viennensis et Hungarici, à *J. Liesganig*, *in-4*. 15 fr.
De la Grandeur et de la Figure de la Terre, par *Cassini*, *in-4*. 12 fr.
Essai sur l'application de l'Analyse aux probabilités des Décisions rendues à la pluralité des voix, par *Condorcet*, *in-4*. 15 fr.
Traité des Mouvemens apparens des Corps célestes, par *Dionis du Séjour*, 2 vol. *in-4*. 48 fr.
Pinecothèque, ou Collection de Tables d'une utilité générale pour multiplier et diviser, par *J. P. Gruson*. *Berlin*, 1798. 10 fr.
Géométrie du Compas, par *L. Mascheroni*, ouvrage traduit de l'italien, *in-8*. 5 fr.
Isaaci Newtoni Enumeratio linearum tertii ordinis; sequitur illustratio ejusd. tractatus, auct. *J. Stirling*, *in-8*. 7 fr. 5 d.
Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris, auct. *S. l'Huillier*, *in-4*. 14 fr.
Œuvres de *Blaise Pascal*, 5 vol. *in-8*. 24 fr.
Elementi d'Algebre di *P. Paoli*, 2 vol. *in-4*. 21 fr.
Teoria dell' Analisi da servire d'introduzione al Metodo diretto ed inverso de' limiti, opera del sig. *Franchini*, 3 vol. *in-8*. 15 fr.
Mémoire sur l'Intégration des Equations différentielles, par le même, *in-4*. 1 fr. 5 d.
De Calculo integralium exercitatio Mathematica, auct. *P. Ferroni*, *in-4*. 15 fr.
Ejusd. Magnitudinum exponentialium, logarithmorum et trigonometriæ sublimis theoria novâ methodo pertractatæ, *in-4*. 24 fr.
Elémens de Géométrie, par *Clairaut*, *in-8*. 5 fr.
Théorie de la Lune, par le même, *in-4*. 9 fr.
Recherches sur les Courbes a double courbure, par le même, *in-4*. 15 fr.
Description et usage d'un nouveau Cercle de réflexion, par *Borda*, *in-4*. 4 fr. 5 d.
Elémens du Calcul intégral, par les PP. *le Seur* et *Jacquier*, 2 vol. *in-4*. 36 fr.
Traité du Calcul intégral, par *Bougainville*, 2 vol. *in-4*. 27 fr.
Scriptores Logarithmici, edente *F. Maseres*, 3 vol. *in-4*. 100 fr.

Les Ouvrages suivans, la plupart imprimés chez l'étranger, ou dont les éditions sont épuisées, ne se trouvent qu'en très-petit nombre dans notre Librairie mathématique. Le prix en est variable selon la plus ou moins belle condition des exemplaires, leur degré de rareté, le cours des ventes publiques et les circonstances qui peuvent établir une plus grande concurrence entre les acquéreurs.

Leonh. Euleri opera analytica quæ extant.
Opuscules mathématiques, par *d'Alembert*.
Traité de Dynamique, par le même.
Traité de l'Equilibre et du Mouvement des Fluides, par le même.
Essai d'une nouvelle Théorie de la résistance des Fluides, par le même.
Réflexions sur la cause générale des Vents, par le même.
Recherches sur différens points importans du Système du Monde, par le même.
Recherches sur la précession des Equinoxes, par le même.
Théorie de la Figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique, par *Clairaut*.
Veteres Mathematici, *in-folio*.
Methodus Incrementorum, auct. *Brook Taylor*.
Pappi Alexandrini Mathematicæ collectiones.
Diverses éditions d'*Euclide*, de *Diophante*, d'*Archimède*, d'*Apollonius* et de *Théodose*.
Les Œuvres de *Tycho*, de *Copernic*, de *Galilée* et de *Kepler*.
Celles de *Cavalieri*, de *Viète*, de *Descartes*, de *Fermat*, de *Sluse*, de *Barrow*, de *Pascal*, de *Huygens*, de *Newton*, de *Leibnitz* et des *Bernoulli*.
Les Mémoires de l'Acad. des Sciences de *Paris*, ceux de l'Acad. de *Berlin*, les Transactions philosophiques de *Londres*, les Commentaires et les Actes de l'Acad. de *Pétersbourg*, les Mélanges et les Memoires de l'Acad. de *Turin*, &c.



Duruisseau Sculp.


20
Z
P
S
S
G
N
S
a
a
21
A
B
C
D
T
P
p
23
A
a
B
b
C
Q
O
M
N
Z
A
26
C

